פִּתְרוֹן תַּרְגִּיל בַּיִת מִסְפָּר 9

שאלה 6.4

א. לא נכון. דוגמא נגדית: $A=\{(1,1)\}, B=\{(1,1),(3,5)\}$.

ב. לא נכון. דוגמא נגדית: $A=\{(1,1)\}, B=\{(2,2)\}$.

שאלה 6.5

א. אין שויון. ננסה לראות האם כל וקטור ב $\mathbb{R}^3$ ניתן להצגה כצ"ל של הוקטורים הנתונים.

נניח $\alpha(2,0,4)+\beta(0,1,0)+\gamma(6,5,12)=(x,y,z)$ לאחר שנציב במטריצה ונדרג נקבל צורה מדורגת $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & x \\ 0 & 1 & 5 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x \end{array}\right)$. אם $z\neq 2x$ אין פתרון למערכת . לכן , הוקטור $(0,0,1)$ למשל לא מתקבל כצירוף ליניארי של הוקטורים.

הסבר נוסף בשימוש מימד: ידוע שהמימד של $\mathbb{R}^3$ הוא 3 ולכן שלושה וקטורים פורשים את המרחב אם ורק אם הם בת"ל. אך הוקטורים הנתונים תלויים לינארית, שכן:

$(6,5,12)=3(2,0,4)+5(0,1,0)$ ולכן קבוצה זו לא פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ב. נבדוק האם ניתן לבטא כל פולינום כצ"ל של ארבעת הפולינומים הנתונים. נשווה אם $\alpha\cdot 1+\beta\left(x+x^2\right)+\gamma\left(4x^3+x^2\right)+\delta\cdot 2x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

מקדמים נקבל: $\Rightarrow \begin{cases} a_0=\alpha, \\ a_1=\beta+2\delta, \\ a_2=\beta+\gamma, \\ a_3=4\gamma \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=a_0, \\ \gamma=\dfrac{a_3}{4}, \\ \beta=a_2-\dfrac{a_3}{4}, \\ \delta=a_1-\dfrac{\beta}{2}=a_1-\dfrac{\left(a_2-\dfrac{a_3}{4}\right)}{2} \end{cases}$

כלומר כל פולינום ממעלה ≤ 3 הוא צירוף ליניארי של 4 הפולינומים הנתונים ומכאן יש שוויון.

הסבר נוסף: המימד של $\mathbb{R}_3\left[x\right]$ הוא 4 וארבעת הוקטורים אינם תלויים ליניארית (יש לבדוק זאת) ולכן הם פורשים את $\mathbb{R}_3\left[x\right]$.

שאלה 7.2

א. $A=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ בת"ל שכן שני הוקטורים שלה אינם כפולה האחד של השני. (ניתן לוודא על ידי בדיקה).

$B=\{(8,10,12),(1,1,2),(1,0,2),(2,0,1)\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$ כי למשוואה $\alpha(8,10,12)+\beta(1,1,2)+\gamma(1,0,2)+\delta(2,0,1)=(x,y,z)$ יש פתרון לכל $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. שימו לב: $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ הם הנעלמים שאמורים להיות מבוטאים באמצעות (x,y,z). (פותרים את המשוואה ע"י דירוג ומראים שיש פתרון תמיד – כלומר אין מצב של אין פתרון.)

ב. יש 3 וקטורים שמקיימים את הדרישה, למשל $(1,1,2)$. היחיד שלא מקיים את הדרישה הוא $(8,10,12)$ כי $\{(8,10,12),(4,5,6)\}$ ת"ל.

שאלה 7.5 וחצי

א. תהי B בת"ל מקסימלית ונראה שהיא פורשת. יש להראות שלכל $v\in V$ מתקיים $v\in span(B)$.

נתבונן בשני מקרים:

1. $v\in B$ ואז ברור ש $v\in span(B)$.

2. $v\in V\setminus B$ ואז לפי הגדרת הת"ל מקסימלית B בת"ל אבל $B\cup\{v\}$ ת"ל. הראינו בעבר שאם קבוצה היא בת"ל אך בתוספת וקטור כלשהו היא הופכת לת"ל אזי אותו וקטור הוא צ"ל של האחרים, מכאן $v\in span(B)$.

קיבלנו שבכל מקרה מתקיים $v\in span(B)$.

ב. נניח ש S פורשת מינימלית ונראה ש S בת"ל. נניח בשלילה ש S ת"ל. מכאן **קיים** וקטור $v\in S$ שהוא צ"ל של שאר איברי S. אבל אז בהכרח $span(S\setminus\{v\})=span(S)$ (מדוע?) ומכיון ש S פורשת הרי $span(S)=V$ ולכן $span(S\setminus\{v\})=V$; אך זו סתירה לכך ש S פורשת **מינימלית**.

שאלה 7.13

א. הבסיס של $\mathbb{C}^3$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ הוא : $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ולכן מימדו 3.

ב. הבסיס של $\mathbb{C}^3$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ הוא :

$\{(1,0,0),(i,0,0),(0,1,0),(0,i,0),(0,0,1),(0,0,i)\}$ ולכן מימדו 6.

שאלה 7.16

תהי $A \in F^{n\times m}$ כאשר $n<m$ ונתבונן במערכת ההומוגנית $Ax=0$. כל פתרון של מערכת משוואות הוא צרוף ליניארי של עמודות המטריצה, לכן על מנת להראות שיש פתרון לא טריוויאלי למערכת הנ"ל – עלינו להראות שקיים צרוף ליניארי לא טריוויאלי של העמודות אשר נותן את ווקטור האפס. כעת, נשים לב כי עמודות המטריצה הן ווקטורים $C_i\left(A\right)\in F^n$.

המימד של F^n הוא n ולכן כל קבוצה בת יותר מ-n איברים בהכרח תלויה ליניארית (מדוע?). הקבוצה $\left\{C_1\left(A\right),...,C_m\left(A\right)\right\}$ מונה m איברים, והיות ו- $n<m$ נקבל שהקבוצה היא תלויה ליניארית. על כן – קיים צרוף ליניארי לא טריוויאלי אשר נותן את אפס:

$\alpha_1 C_1\left(A\right)+...+\alpha_m C_m\left(A\right)=0$. הפתרון הרצוי הוא $x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{pmatrix}$.

שאלות לא מהחוברת

שאלה 1

מצאו בסיס ומימד לתתי המרחב הבאים של $\mathbb{R}^{n\times n}$:

נגדיר: $E_{ij}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך שכל רכיביה הם אפסים, פרט ל-"1" במקום ה- ij

א. מרחב מטריצות משולשיות עליונות

פתרון:

הבסיס הוא: $\left\{E_{ij}\ :\ i\le j\right\}$.

המימד: יש סה"כ n^2 איברים במטריצה, יש n על האלכסון, מכאן, שמעל האלכסון ומתחתיו יש n^2-n. לכן, רק מעל האלכסון יש $\frac{n^2-n}{2}$ ויחד עם האלכסון נקבל שיש $\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}$ איברים. לכן יש $\frac{n^2+n}{2}$ מטריצות בבסיס ולכן זהו המימד.

ב. מרחב המטריצות הסקלריות

פתרון:

הבסיס הוא $\left\{I\right\}$ ולכן המימד הוא 1.

ג. מרחב המטריצות האלכסוניות

פתרון:

בדומה לסעיף א', הבסיס הוא $\left\{E_{ii}\ :\ 1\le i\le n\right\}$ ולכן המימד הוא n.

ד. מרחב מטריצות אנטי-סימטריות

פתרון:

בכל מטריצה אנטי-סימטרית יש רק אפסים על האלכסון, וכמו כן, כל איבר מעל האלכסון, קובע את האיבר המתאים מתחת לאלכסון (שכן $a_{ij}=-a_{ji}$).

על מנת להציג את הבסיס, נגדיר את המטריצות M_{ij} עבור $i>j$:

$$\left(M_{ij}\right)_{kt}=\begin{cases}1 & i=k, j=t\\ -1 & i=t, j=k\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

. כעת, הבסיס הוא $\left\{M_{ij}\ : i>j\right\}$.

המימד הוא: $\frac{n^2-n}{2}$

ה. הסיקו מאחד הסעיפים הקודמים: מימד ובסיס למרחב המטריצות הסימטריות

<u>פתרון:</u>

לגבי המימד: קל לראות שהמטריצה הסימטרית נקבעת על פי איברי האלכסון ואיברים שמעל האלכסון. יש בסה"כ $\frac{n^2+n}{2}$ איברים כנ"ל. לכן זהו המימד. הבסיס הוא: $\left\{E_{ii}\ :\ 1\le i\le n\right\}$ איחוד עם

$$\left(N_{ij}\right)_{kt}=\begin{cases}1 & i=k, j=t\\ 1 & i=t, j=k\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

עבור $i<j$.

<u>שאלה 2</u>

יהי $V=\left(\mathbb{Z}_3\right)^2$ מרחב ווקטורי ממימד 2 מעל $\mathbb{Z}_3$.

א. מצאו את מספר הווקטורים ב- V

<u>פתרון:</u>

מתקיים $V=\left\{(a,b):\ a,b\in\mathbb{Z}_3\right\}$ ולכן יש סה"כ 9 איברים.

ב. מצאו את מספר הבסיסים <u>השונים</u> ל- V

<u>פתרון:</u>

בבסיס של המרחב יש שני ווקטורים בת"ל. על מנת לבחור שני ווקטורים לבסיס, ראשית עלינו לבחור את הווקטור הראשון. הווקטור הראשון הוא ווקטור כלשהו השונה מווקטור האפס. לכן יש 8 אפשרויות שונות לבחירת הווקטור הראשון. כעת, משבחרנו את הווקטור הראשון, נאמר v, כמה ווקטורים לא תלויים ליניארית בו נותרו? קודם כל, ווקטור האפס תלוי בו ליניארית ולכן יורד מהפרק. שנית, גם v עצמו יורד מהפרק. מה עוד? גם כל כפולה שלו בסקלר, ולכן $2v$ גם ירד מהפרק. לכן, נותרו לנו בסה"כ 6 ווקטורים כמועמדים להשלמת v לבסיס. כלומר, יש סה"כ $8\cdot 6$ דרכים לבחור שני ווקטורים בת"ל. נשים לב שאין חשיבות לסדר, שכן $\{v,w\}=\{w,v\}$ ולכן נחלק את מספר האפשרויות ב-2 ונקבל 24 בסיסים שונים.

ג. מצאו את מספר תתי המרחב השונים של V ממימד 1

<u>פתרון:</u>

תת מרחב ממימד 1 מתקבל כ- $span\{v\}$ עבור $v \neq 0$. יש 8 ווקטורים כאלה. אך ברור ש- $span\{v\} = span\{2v\}$ ולכן יש לחלק ב-2. כלומר, יש סה"כ 4 תתי מרחבים ממימד 1.

<u>הערה</u>: למעשה, כדי להשתכנע בכל הספירות שעשינו, שימו לב שהמרחב כולו נראה כך: $\{0, v, 2v, w, 2w, u, 2u, t, 2t\}$ (מדוע?)