וקטורים – בגישה משולבת
שאלון 035807
חלק א

ד"ר נעמי צ'יזיק

תשע"ז

מפגש 7 נצרת עילית

תרגיל 1

נתונה הצגה פרמטרית של הישר $(x,y,z)=(-1,2,1)+s(3,-1,2)$

קבעו אילו מבין הנקודות הבאות נמצאות על הישר: C(5,0,5) B(-4,3,-1) A(-10,5,4)

תרגיל 2

נתון הישר: $\underline{x}=(5,-3,4)+t(-2,1,7)$

מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לו ועובר דרך הנקודה (6,8,9)

תרגיל 3

נתונות הנקודות B(-4,8,10) A(-1,2,4).

א. מצאו את נקודת החיתוך של הישר AB עם המישור [XY].

ב. הוכיחו כי הישר AB חותך רק את אחד הצירים. מצאו את נקודת החיתוך.

הדרכה לפתרון:

היזכרו במשוואות המישורים השונים.

נקודת חיתוך של ישר ומישור *היא נקודה ששיעוריה מקיימים את שתי המשוואות: של הישר ושל המישור. לכן הצבת שיעורי x, y ו-z הפרמטריים במשוואת המישור התבניתית תאפשר למצוא את ערך הפרמטר המקיים את המשוואה, והמייצג, על כן, את נקודת החיתוך.*

מצב הדדי של ישרים במרחב

<u>דוגמה</u>

קבעו את המצב ההדדי של הישרים:

$$l_1 : (x, y, z) = (2, -1, 0) + t(1, -2, 3)$$
$$l_2 : (x, y, z) = (4, 2, -3) + s(-4, 1, -3)$$

$$(2, -1, 0) + t(1, -2, 3) = (4, 2, -3) + s(-4, 1, -3)$$

$$\begin{cases} 2 + t = 4 - 4s \\ -1 - 2t = 2 + s \\ 0 + 3t = -3 - 3s \end{cases}$$

s = 1 ו- t = -2

תרגיל (גבי יקואל, י״ב חלק א, 151/8)

הנקודה P נמצאת על המישור YZ וגם על הישר $l_1 : \underline{x} = (3,8,12) + t(1,2,3)$

מצאו הצגה פרמטרית של הישר l_2 העובר דרך הנקודה P ומקביל לישר

$$l_3 : \underline{x} = (1,1,1) + s(0,1,1)$$

פתרון

$$P(3+t, 8+2t, 12+3t) \qquad 3+t=0 \Rightarrow t=-3 \qquad P(0,2,3)$$

$$l_2 : \underline{x} = (0,2,3) + k(0,1,1)$$

<u>תרגיל</u> גבי יקואל, י״ב חלק א, 152/11

שלוש צלעות של מקבילית נמצאות על הישרים :

$$\underline{x}=(0,2,5)+t(0,1,1) \qquad \underline{x}=(4,7,6)+s(1,2,1) \qquad \underline{x}=(1,3,5)+k(0,2,2)$$

הנקודה P(0,- 0.5,2.5) נמצאת באמצע אחת מצלעות המקבילית.

מצאו את ארבעת קודקודי המקבילית.

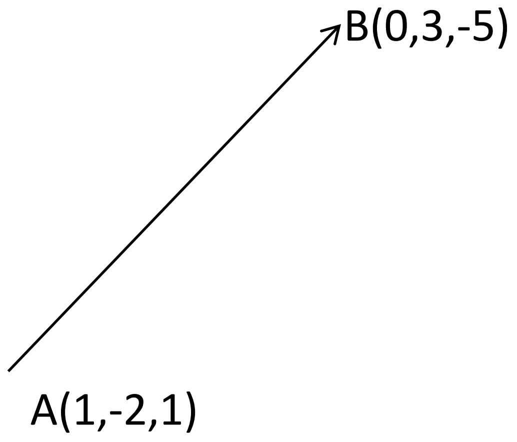
תשובות: (0,-1,2) (1,1,3) (0,0,3) (1,2,4)

ניצבות ישרים

<u>דוגמה</u>

נתונות הנקודות B(0,3,-5)   A(1,-2,1).

מצאו את ההצגה הפרמטרית של ישר הניצב ל-AB ועובר דרך B.



$$\overrightarrow{AB} = (-1,5,-6) \qquad \underline{u} = (x, y, z)$$

$$-x + 5y - 6z = 0 \qquad y \equiv t \quad z \equiv s$$

$$x = 5t - 6s$$

$$\underline{u} = (5t - 6s, t, s)$$

$$l: \ \underline{x} = (0,3,-5) + p(5t - 6s, t, s)$$

תרגיל **להגשה**

(רימון ועמיצור, 120/51)

נתונות הנקודות A, B, C. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר הנמצא במישור ABC העובר דרך הנקודה A וניצב לישר BC. *(הערה שלי: היעזרו בסקיצה!!)*

א- $C = (-1,0,4) \quad B = (3,1,2) \quad A = (0,0,0)$

ב- $C = (1,-1,4) \quad B = (0,3,-5) \quad A = (1,-2,1)$

תרגיל (גבי יקואל, י"ב חלק א, 246/23)

במנסרה משולשת $ABCA'B'C'$ נתונים השיעורים של ארבעה קדקודים:

B(3,-1,-2)   A(2,3,1)   A'(10,9,-5)   C'(1,3,2) .

הנקודה D נמצאת באמצע BB' והנקודה E נמצאת באמצע הקטע BC .

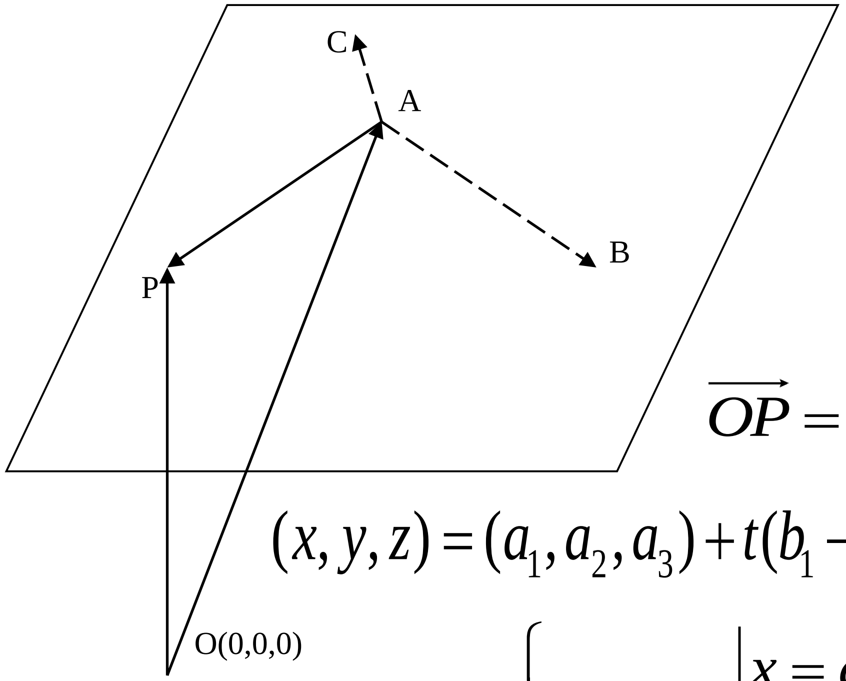
א. מצאו את שיעורי הנקודות D ו-E .

פתרון: D(7,2,-5)   E(-2,-2,3)

ב. הוכיחו כי לא ניתן למצוא נקודה F בתוך הקטע $A'C'$ כך ש: $\angle FED = 90^0$

ג. הוכיחו כי ניתן למצוא נקודה M בתוך הקטע AC כך ש- $\angle MED = 90^0$

הצגה פרמטרית של מישור במרחב



$$A(a_1,a_2,a_3)\quad B(b_1,b_2,b_3)\quad C(c_1,c_2,c_3)$$

$$P(x,y,z)$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$$

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+t(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)+s(c_1-a_1,c_2-a_2,c_3-a_3)$$

$$\left\{(x,y,z)\left|\begin{array}{l}x=a_1+t(b_1-a_1)+s(c_1-a_1)\\y=a_2+t(b_2-a_2)+s(c_2-a_2)\\z=a_3+t\left(b_3-a_3\right)+s(c_3-a_3)\end{array}\right.\right\}$$

מעבר מהצגה תבניתית של מישור להצגה פרמטרית

<u>דרך א</u>

נתון המישור שמשוואתו $2x + y – z = 1$.

נבחר: $x = t \quad y = s$

מכאן נובע: $z = 2t + s – 1$

$$(x,y,z)=(0,0,-1)+t(1,0,2)+s(0,1,1) \quad \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{array}{l} x=t \\ y=s \\ z=2t+s-1 \end{array} \right\}$$

<u>תרגיל</u>

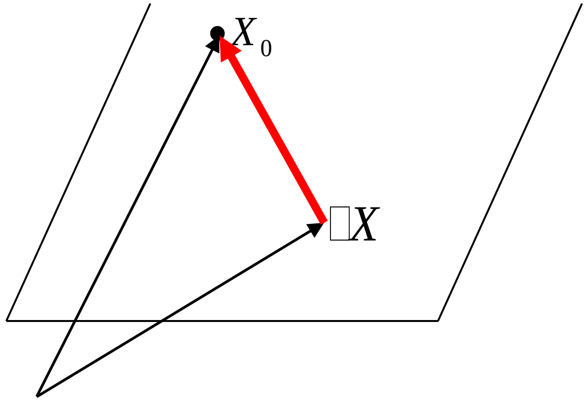
מצאו את משוואת המישור המכיל את הישר $\underline{x}=(1,0,-2)+m(1,1,-1)$

וגם עובר דרך הנקודה $(3,3,-1)$.

כל וקטור $(a,b,c)\neq \underline{0}$ **מאונך למישור שמשוואתו** $ax+by+cz=d$

שתי הנקודות שבציור נמצאות על המישור. לכן הן מקיימות את משוואת המישור.

$$\overrightarrow{OX_0}=(x_0,y_0,z_0) \quad \underline{u}=(a,b,c) \quad \underline{u}\cdot\overrightarrow{OX_0}=ax_0+by_0+cz_0=d$$



$$\underline{u}\cdot\overrightarrow{OX}=d$$

$$\underline{u}\cdot\left(\overrightarrow{XX_0}\right)=\underline{u}\cdot\left(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OX_0}\right)=\underline{u}\cdot\left(-\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OX_0}\right)=$$

$$-\underline{u}\cdot\overrightarrow{OX}+\underline{u}\cdot\overrightarrow{OX_0}=-d+d=0$$

כלומר : כל נקודה X על המישור תיצור עם הנקודה הנתונה על המישור וקטור הניצב לוקטור המקדמים.

המשפט נכון גם במישור, כאשר הוקטור (a,b) הוא הוקטור הניצב לישר ax+by=c.