

אלגברה לינארית 1 (8812), סמסטר קיץ תשפ"ה, מועד ב'

18.9.2025, כ"ה באלול התשפ"ה

מרצים: עוזי חרוש, אריאל ויצמן, דניס גולקו, ארז שיינר.
מתרגלים: יחזקאל אימרה רגב, בוריס גוליקוב, שירה ידעי, נמרוד נדבורני, עידו פלדמן, איתן פרימן, אביתר ישראל שויקה.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.

- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטייטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (8 נקודות לכל סעיף) נתבונן במטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ הבאה התלויה בפרמטר $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 2 & 3 & a+1 \end{pmatrix}$$

(א) לכל ערך של $a \in \mathbb{R}$ קבעו האם למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

(ב) הוכיחו ש

$$U = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 5v\}$$

הוא תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^3$.

(ג) עבור $a = 2$ חשבו את $\dim U$.

2. נתבונן במרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}_2[x]$ ובתתי המרחבים

$$U = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$$

$$W = \{s + tx + (s - t)x^2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

(א) (10 נקודות) מצאו בסיסים לתתי-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^3$:

i. $U \cap W$. הסיקו: $\dim(U \cap W) = 1$.

ii. $U + W$. הסיקו: $\dim(U + W) = 3$.

(ב) (8 נקודות) האם קיימת העתקה לינארית $T : V \rightarrow V$ כך ש $U \cap W = \ker(T)$, $W = \text{Img}(T)$?

(ג) (8 נקודות) תהא $T : V \rightarrow V$ כך ש $\text{Img}(T) = U + W$. הוכיחו או הפריכו: T הפיכה.

3. (8 נקודות לכל סעיף) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אנטי-סימטרית (כלומר, $A^t = -A$) אז A לא הפיכה.

(ב) לכל $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $AB = A + B$ מתקיים: אם A הפיכה אז B הפיכה.

(ג) יהי V מרחב וקטורי. לכל שתי קבוצות סופיות $A, B \subseteq V$ מתקיים: אם $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) \neq \{0\}$ ובנוסף $\dim \text{span}(B) = 1$ אז $\text{span}(A) \cup \text{span}(B)$ תת-מרחב וקטורי של V .

4. נחשוב על $\mathbb{F}^n$ כמרחב וקטורי עמודה. יהי $W \leq \mathbb{F}^n$ תת-מרחב. נגדיר:

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{F}^n \mid \forall w \in W : v^t w = 0\}$$

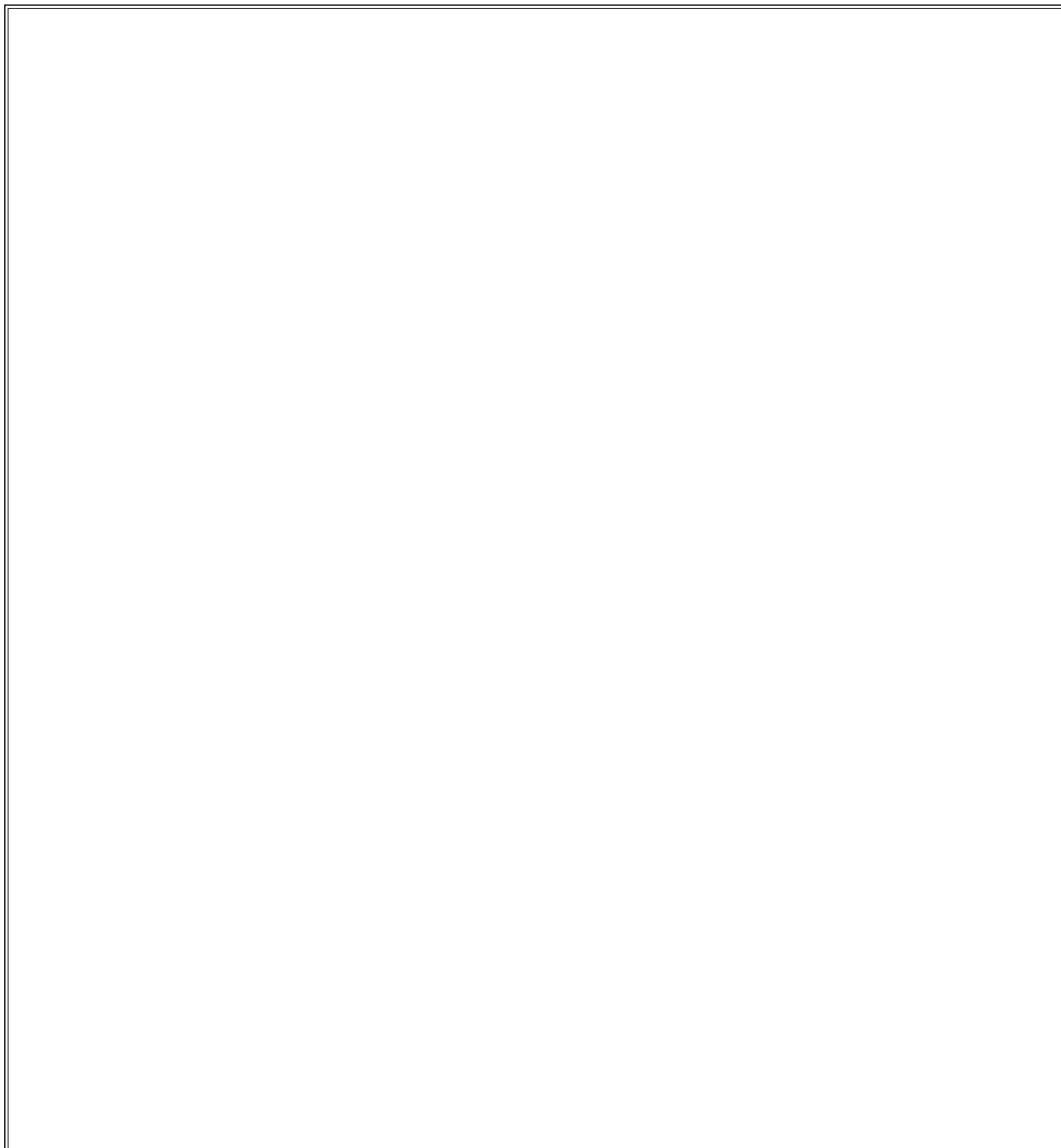
(א) (9 נקודות) הוכיחו או הפריכו: $W^\perp$ תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{F}^n$.

(ב) (7 נקודות) הוכיחו: לכל שני תתי מרחבים $W, U \leq V$ מתקיים:

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$$

(ג) (7 נקודות) נתבונן ב $\mathbb{R}^4$ ובתת המרחב $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. הוכיחו או הפריכו:

$$\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$$



5. (7 נקודות לכל סעיף) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס.

(א) תהא $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית, ונרשום:

$$T(v_1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

תהא $S : V \rightarrow V$ העתקה לינארית כך שקיים $1 \leq j \leq n$ עבורו

$$S(v_1) = v_j$$

$$\forall i \neq 1 : S(v_i) = 0$$

הוכיחו שאם $TS = ST$ אז

$$T(v_j) = \alpha_1 v_j$$

(ב) תהא $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית כך שלכל העתקה לינארית $S : V \rightarrow V$ מתקיים $TS = ST$. הוכיחו: קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ עבורו

$$\forall v \in V : Tv = \alpha v$$

