

מתמטיקה בדידה – תרגיל 1

1. (15 נק') מהי טבלת האמת של הביטויים:

א. $(a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow b)$

ב. $(a \leftrightarrow b) \vee (\neg a \leftrightarrow \neg b)$

ג. $(\neg a \leftrightarrow \neg b) \leftrightarrow (\neg a \leftrightarrow b)$

פתרון:

a	b	$\neg a$	$a \rightarrow b$	$\neg a \rightarrow b$	$(a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow b)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

א.

a	b	$\neg a$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a \leftrightarrow b$	$(a \leftrightarrow b) \vee (\neg a \leftrightarrow b)$
T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T

ב.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \leftrightarrow \neg b$	$\neg a \leftrightarrow b$	$(\neg a \leftrightarrow \neg b) \leftrightarrow (\neg a \leftrightarrow b)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	F	F

ג.

2. (20 נק') הוכח או הפרך בעזרת טבלאות אמת את השקילות של הפסוקים:

א. $(a \wedge b) \rightarrow a \equiv a \rightarrow (b \rightarrow a)$

ב. $a \wedge \neg(b \vee c) \equiv (a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg c)$

ג. $a \leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

ד. $(a \rightarrow b) \rightarrow c \equiv a \rightarrow (b \rightarrow c)$

פתרון:

א. שני הפסוקים הם טאוטולוגיה ולכן שקולים.

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \rightarrow a$	$b \rightarrow a$	$a \rightarrow (b \rightarrow a)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T

ב. שני הפסוקים מקבלים אותם ערכים לוגיים ולכן שקולים.

a	b	c	$\neg b$	$\neg c$	$b \vee c$	$\neg(b \vee c)$	$a \wedge \neg(b \vee c)$	$a \wedge \neg b$	$a \wedge \neg c$	$(a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg c)$
T	T	T	F	F	T	F	F	F	F	F
T	T	F	F	T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F	F	F	F
F	T	F	F	T	T	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	T	T	F	T	F	F	F	F

ג. שני הפסוקים לא מקבלים תמיד את אותם ערכים לוגיים ולכן אינם שקולים.

a	b	c	$\neg a$	$\neg c$	$a \wedge b$	$\neg a \wedge \neg c$	$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$	$a \leftrightarrow b$
T	T	T	F	F	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T

ד. שני הפסוקים לא מקבלים תמיד את אותם ערכים לוגיים ולכן אינם שקולים.

a	b	c	$a \rightarrow b$	$(a \rightarrow b) \rightarrow c$	$b \rightarrow c$	$a \rightarrow (b \rightarrow c)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

3.

כתבו את הטענות הבאות כפסוקים. כאשר מכמתים, הכימות הוא על כל האנשים והשמות ביהד.

1. לכל איש יש שם

2. אם קיים איש עם שם יחיד אז לא קיים איש ללא שם

פיתרון:

1. $\forall x \exists Y: Y(x)$

2. $\exists x: \exists! Y: Y(x) \rightarrow \neg \exists x: \forall Y \neg Y(x) \equiv \exists x \exists! Y: Y(x) \rightarrow \forall x Y(x)$

4. נניח \square קבוצה של מספרים שלמים. אזי ניקח: $\square \supseteq A = \{2m+1 | m \in \square\}$, $\square \supseteq B = \{2m+3 | m \in \square\}$. הוכיחו: $A = B$.

הוכחה:

(1) נניח $x \in A \Leftrightarrow x = 2m+1 \Leftrightarrow x = 2(m-1)+3 \Leftrightarrow x = 2n+3 \Leftrightarrow x \in B$

(2) נניח $x \in B \Leftrightarrow x = 2m+3 \Leftrightarrow x = 2(m+1)+1 \Leftrightarrow x = 2n+1 \Leftrightarrow x \in A$

5. הוכיחו (לפי ההגדרה): $A \square B = A \square C \Rightarrow B = C$

הוכחה: $x \in B$, צ"ל $x \in C$.

$x \in B \Leftrightarrow x \in A \square B$ (1) ו- $x \in A \square B \Leftrightarrow x \in A$ ו- $x \in B$ (2) ו- $x \notin A$.

(1) $x \in C \Leftrightarrow x \notin A \square C \Leftrightarrow x \notin A \square B \Leftrightarrow x \notin B \setminus A$ ו- $x \notin A \setminus B$.

(2) $x \in C \Leftrightarrow x \in A \square C \Leftrightarrow x \in A \square B \Leftrightarrow x \in B \setminus A$.

6. הראו כי: $A \square B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

הוכחה: כיוון (\Rightarrow) : $x \in A, x \notin B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \square B \Rightarrow x \notin A \cap B$
 $x \notin A, x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \square B \Rightarrow x \notin A \cap B$

$$\begin{aligned}
A \square B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \stackrel{(distr.law)}{=} \\
&= ((A \cap B^c) \cup B) \cap ((A \cap B^c) \cup A^c) \stackrel{(distr.law)}{=} \\
&= ((A \cup B) \cap (B^c \cup B)) \cap ((A \cup A^c) \cap (A^c \cup B^c)) = && \text{כיוון } (\leq) \\
&= ((A \cup B) \cap \mathbf{U}) \cap (\mathbf{U} \cap (A^c \cup B^c)) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \stackrel{(de-morgan.law)}{=} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \stackrel{(A \cap B = \emptyset)}{=} (A \cup B) \cap \mathbf{U} = A \cup B
\end{aligned}$$