אינפי 4 – תרגול 11

<u>קשר בין כיוון של עקומה למכוון של משטח</u>

נניח ויש לנו משטח σ ב $\mathbb{R}^3$ עם אוריינטצייה, והשפה שלו היא עקומה סגורה ופשוטה. אז נוכל להגדיר את האוריינטצייה המושרית על השפה C של σ. נכוון את בוהן יד ימין לכיוון האוריינטצייה שבחרנו על σ והאוריינטצייה על C תהיה בכיוון של אצבעות יד ימין.

<u>האופרטור Curl</u>

האופרטור curl מקבל שדה וקטורי F ב $\mathbb{R}^3$ ומחזיר שדה וקטורי G ב $\mathbb{R}^3$. על מנת להגדיר את ה $curl$ בנקודה מסויימת, ניקח דיסקית בעלת שטח A ונציב אותה כך שהמרכז שלה הינו בנקודה (x,y,z) והיא מקבילה למישור yz. אז נחשב את הגבול הבא:

$$G(x,y,z)\cdot\hat{\mathbf{i}}=\lim_{|A|\to 0}\frac{1}{|A|}\oint_C F\cdot dr$$

כלומר קיבלנו את הרכיב בכיוון $\hat{\mathbf{i}}$ של G. באותו אופן נמצא את הרכיבים של G בכיוון $\hat{\mathbf{j}}$ ו $\hat{\mathbf{k}}$. למעשה ה $curl$ מודד את הסיבוביות של השדה F.

משפט: (סטוקס) יהי σ משטח בר כיוון חלק למקוטעין ששפתו היא עקומה פשוטה, סגורה וחלקה למקוטעין C, שכיוונה חיובי. יהי –

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)i+g(x,y,z)j+h(x,y,z)k$$

שדה וקטורי שרכיביו רציפים ובעלי נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון בקבוצה פתויה כלשהי המכילה את σ. אזי מתקיים $\oint_C F\cdot dr=\iint_\sigma (curlF)\cdot\mathbf{n}dS$.

דוגמא: יהי σ חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$. נסמן ב C את המעגל $x^2+y^2=4$, שהוא השפה של σ במישור xy. בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים לשדה הוקטורי $F(x,y,z)=2zi+3xj+5yk$, כאשר המכוון של σ הוא כלפי מעלה.

פתרון: נבדוק שמשפט סטוקס מתקיים. מכיוון של σ מכוון כלפי מעלה, הכיוון החיובי של C הוא הכיוון ההפוך לכיוון השעון. לכן ניתן להציג את C כעקומה הפרמטרית

$$x=2\cos t, y=2\sin t, z=0 \qquad (0\leq t\leq 2\pi)$$

לכן:

$$\oint_C F\cdot dr=\oint_C 2zdx+3xdy+5ydz=\int_0^{2\pi}\left[0+\left(6\cos t\right)\left(2\cos t\right)+0\right]dt$$

$$\int_0^{2\pi}12\cos^2 tdt=12\pi$$

כדי לחשב את אגף ימין של משפט סטוקס נחשב קודם את $curlF$:

$$curlF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 3x & 5y \end{vmatrix}=5i+2j+3k$$

מכיוון ל σ מכוון כלפי מעלה, והוא מוצג בצורה $z=g\left(x,y\right)=4-x^2-y^2$, אנו מקבלים

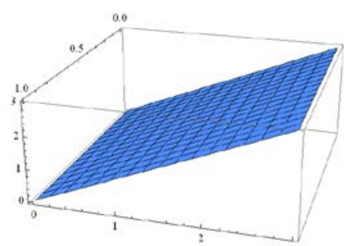
$$\iint_\sigma\left(curlF\right)\cdot\mathbf{n}dS=\iint_R\left(5i+2j+3k\right)\left(2xi+2yj+k\right)dA$$

$$\iint_R\left(10x+4y+3\right)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(10r\cos\theta+44r\sin\theta+3\right)rdrd\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{80}{3}\cos\theta+\frac{32}{3}\sin\theta+6\right)d\theta=12\pi$$

וקיבלנו כי המשפט אכן מתקיים.

דוגמא: תהי C העקומה בצורת מלבן במישור $z=y$ שכיוונה מושרה מבחירת אוריינטציה בכיוון ציר ה $z-$ על σ . יהי $F\left(x,y,z\right)=x^2i+4xy^3j+y^2xk$. חשב את $\oint_C F\cdot dr$.



פתרון: חישוב ישיר של האינטגרל יצריך ארבעע איטגרציות נפרדות – אינטגרציה לאורך כל אחת מצלעות המלבן. במקום זה נשתמש במשפט סטוקס, כך שיהא עלינו לחשב איטגרל משטחי יחיד על פני המשטח המלבני σ הכלוא ב C .

$$curlF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 4xy^3 & y^2 x \end{vmatrix} = 2xyi - y^2 j + 4y^3 k$$

מכאן ש

$$\iint_{\sigma} (curlF) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{R} \left(2xyi - y^2 j + 4y^3 k\right) \cdot \left(0i + j - k\right) dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^3 \left(-y^2 - 4y^3\right) dydx = -90$$