פתרון תרגיל 10

1. א. נתון האינטגרל $\int_C \frac{1}{\sin z}dz$ כאשר C הוא המעגל $|z|=1$. לפונקציה $\frac{1}{\sin z}$ יש קוטב פשוט ב- $z=0$ עם שארית 1 שכן $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$ ולכן $\int_C \frac{1}{\sin z}dz = 2\pi i$.

ב. נתון האינטגרל $\int_C \frac{z}{\cos^2 z}dz$ אשר C הוא המעגל $|z-\frac{\pi}{2}|=1$. נרשום את האינטגרל בצורה

$$\int_C \frac{z}{\cos^2 z}dz = \int_C \frac{(z-\pi/2)}{\cos^2 z}dz + \frac{\pi}{2}\int_C \frac{1}{\cos^2 z}dz .$$

לפונקציה $\frac{(z-\pi/2)}{\cos^2 z}$ יש קוטב פשוט בנקודה $z=\pi/2$ עם שארית 1. אכן

$$\lim_{z\to\pi/2}\frac{(z-\pi/2)^2}{\cos^2 z} = \lim_{z\to\pi/2}\frac{(z-\pi/2)^2}{\sin^2(z-\pi/2)} = 1 .$$

לפונקציה $\frac{1}{\cos^2 z}$ יש שארית ששווה לאפס בנקודה $z=\frac{\pi}{2}$. אכן

$$\frac{1}{\cos^2 z} = \frac{1}{(-\sin(z-\pi/2))^2} = \frac{1}{\sin^2(z-\pi/2)} = \frac{1}{\left(z-\pi/2-\frac{(z-\pi/2)^3}{3!}+\frac{(z-\pi/2)^5}{5!}-\ldots\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(z-\pi/2)^2\left(1-\frac{(z-\pi/2)^2}{3!}+\frac{(z-\pi/2)^4}{5!}-\ldots\right)^2} =$$

$$\frac{1}{(z-\pi/2)^2\left(1-\left(\frac{(z-\pi/2)^2}{3!}-\frac{(z-\pi/2)^4}{5!}+\ldots\right)\right)^2} =$$

$$\frac{1}{(z-\pi/2)^2}\left(1+\left(\frac{(z-\pi/2)^2}{3!}-\frac{(z-\pi/2)^4}{5!}+\ldots\right)+\left(\frac{(z-\pi/2)^2}{3!}-\frac{(z-\pi/2)^4}{5!}+\ldots\right)^2+\ldots\right)^2$$

מהצגה זו רואים שהמקדם של $(z-\pi/2)^{-1}$ שווה לאפס כי רק חזקות זוגיות של $(z-\pi/2)$ מופיעות בטור.

לסיכום, האינטגרל שווה ל- $2\pi i$.

ג. נתון האינטגרל $\int_C \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz$ כאשר C הוא המעגל $|z|=\frac{1}{2}$. הפונקציה $f(z)=\frac{e^z}{z-1}$ אנליטית בעיגול $|z|<1$ המכיל את C יחד עם הפנים שלו. לכן לפי נוסחת קושי לנגזרת הראשונה נקבל

$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz=\int_C \frac{f(z)}{z^2}dz=2\pi i f'(0)=-4\pi i.$$

ד. נתון האינטגרל $\int_C \frac{\cosh z}{z^{n+1}}dz$ כאשר n מספר חיובי שלם, ו- C הוא המעגל $|z|=1$. לפי נוסחת קושי לנגזרת ה- n -ית:

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^{n+1}}dz=n!2\pi i\cosh^n(0).$$

כיוון ש- $\cosh^{(n)}(z)=\sinh(z)$ אם n אי זוגי ו- $\cosh^{(n)}(z)=\cosh(z)$ אם n זוגי נקבל ש- $\int_C \frac{\cosh z}{z^{n+1}}dz=0$ אם n אי זוגי ו- $\int_C \frac{\cosh z}{z^{n+1}}dz=2\pi i n!$ אם n זוגי.

ה. נתון האינטגרל $\int_C e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}dz$ כאשר C הוא המעגל $|z|=1$. קל למצוא את השארית של הפונקציה $e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}$ ב- $z=0$ אם מחשבים את האיברים הראשונים של הטור,

$$e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+...\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+...\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...$$

לכן השארית היא 1 ולכן

$$\int_C e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}dz=2\pi i.$$

ו. נתון האינטגרל $\int_C \frac{1}{z(1-\cos z)}dz$ כאשר C הוא המעגל $|z|=1$. נחשב איברים ראשונים בטור לורן סביב $z=0$:

$$\frac{1}{z(1-\cos z)}=\frac{1}{z}\frac{1}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+...}=\frac{2}{z^3}\frac{1}{1-\frac{z^2}{12}+...}=\frac{2}{z^3}\left(1+\frac{z^2}{12}+...\right)=\frac{2}{z^3}+\frac{1}{6}\frac{1}{z}+...$$

השארית היא $\frac{1}{6}$ ולכן $\int_C \frac{1}{z(1-\cos z)}dz=\frac{1}{6}2\pi i=\frac{\pi i}{3}$.

ז. נתון האינטגרל $\int_C \left(1-z^2\right)e^{\bar{z}}dz$ כאשר C הוא המעגל $|z|=2$. כיוון ש- $|z|=2$, כלומר $z\bar{z}=4$ או $\bar{z}=\frac{4}{z}$ נובע ש- $e^{\bar{z}}=e^{\frac{4}{z}}$. נפתח את הפונקציה $\left(1-z^2\right)e^{\frac{4}{z}}$ לטור לורן סביב $z=0$:

$$\left(1-z^2\right)e^{\frac{4}{z}}=\left(1-z^2\right)\left(1+\frac{4}{z}+\frac{8}{z^2}+\frac{32}{3z^3}+...\right)$$

מכאן קל לבדוק שהמקדם של z^{-1} הוא $-\frac{20}{3}$. לכן

$$\int_C \left(1-z^2\right)e^{\bar{z}}dz=\frac{-40\pi i}{3}.$$

2. א. לפונקציה $z\mapsto\frac{z^3}{z^4+1}$ ארבעה קטבים פשוטים בנקודות שבהן המכנה מתאפס, כלומר בנקודות $e^{i\pi k/4}, k=1,3,5,7$. מן הקטבים האלו, רק $e^{i\pi/4}$ ו- $e^{i3\pi/4}$ נמצאים בתוך C ומתקיים: $\operatorname{Res}(f,e^{i\pi/4})=\operatorname{Res}(f,e^{i3\pi/4})=\frac{1}{4}$. לכן האינטגרל שווה ל- $2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\pi i$.

ב. לפונקציה $z\to\frac{1+z}{\sin z}$ קטבים בנקודות שבהן $\sin z=0$. כלומר כאשר $z=n\pi$, n שלם. לכן הקטבים היחידים של הפונקציה הנמצאים בתוך C הם $\pi,0$ ו- $-\pi$ שהם כולם קטבים פשוטים. השאריות בנקודות אלו הן $1, -1-\pi$ ו- $-1+\pi$ בהתאמה. לכן האינטגרל שווה ל- $2\pi i(1+(-1-\pi)+(-1+\pi))=-2\pi i$.

ג. נציב $z=e^{i\theta}$. לכן $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, $d\theta=\frac{dz}{iz}$ ונקבל

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\frac{2}{i}\int_C\frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

כאשר C הוא מעגל היחידה. לפונקציה $z\mapsto\frac{1}{z^2+4z+1}$ קטבים בנקודות $z=-2+\sqrt{3}$ ו- $z=-2-\sqrt{3}$. רק הראשונה מבין הנקודות האלו נמצאת בתוך C. זהו קוטב פשוט ששארית הפונקציה בו היא $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. לכן האינטגרל שווה ל- $\frac{2}{i}2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

ד. כמו בסעיף ג נקבל:

$$\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta=\int_C\frac{(z+z^{-1})^n}{2^n}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{2^n i}\int_C\frac{(z^2+1)^n}{z^{n+1}}dz.$$

לפונקציה $z \mapsto \frac{(z^2+1)^n}{z^{n+1}}$ יש קוטב מסדר $n+1$ בנקודה $z=0$. מנוסחת הבינום נקבל

$$\frac{(z^2+1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{2k-n-1}.$$

אם n הוא מספר אי זוגי אז $2k-n-1$ הוא מספר זוגי ולכן המקדם של z^{-1} שווה לאפס ולכן האינטגרל שווה לאפס. אם n הוא מספר זוגי אז $2k-n-1=-1$ כאשר $k=\frac{n}{2}$ ואז המקדם של z^{-1} שווה ל-$\binom{n}{n/2}$. ולכן

$$\int_0^{2\pi} \cos^n\theta d\theta = \frac{1}{2^n i}\int_C \frac{(z^2+1)^n}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{2^n i}\binom{n}{n/2} = \frac{\pi}{2^{n-1}}\binom{n}{n/2}.$$