

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132)

פתרון מועד א' (05.02.15)

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

ניקוד: שאלה ראשונה שווה 15 נקודות, כל סעיף בשאלות 2-5 שווה 10 נקודות. שאלת בונוס שווה 7 נקודות.

שאלה 1

הוכיחו את משפט Rolle:

תהי f פונקציה ממשית הרציפה על הקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה על הקטע הפתוח (a, b) . אם $f(a) = f(b) = 0$ אזי קיימת לפחות נקודה אחת $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

פתרון

לפי הנתון f רציפה על $[a, b]$ ולכן לפי משפט וויירשטראס היא מקבלת מינימום ומקסימום בקטע זה. נסמן את הערך המקסימלי ב- M ואת הערך המינימלי ב- m . מכיוון ש- $f(a) = f(b) = 0$ מתקיים: $m \leq 0 \wedge M \geq 0$.

נפצל למקרים:

$$1. \quad m = 0 \wedge M = 0$$

במקרה זה f היא פונקציית האפס ($\forall x \in [a, b]: f(x) = 0$) ולכן לכל $c \in [a, b]$

$$\text{מתקיים } f'(c) = 0.$$

$$2. \quad M > 0$$

נסמן ב- x_1 את הנקודה בה המקסימום מתקבל, כלומר $f(x_1) = M$. לפי משפט

הנקודה הקריטית ידוע שמתקיים אחד מהבאים:

א. x_1 היא נקודת קצה

מקרה זה לא ייתכן, שכן נתון כי f מתאפסת בקצוות ואילו אצלנו מתקיים

$$f(x_1) = M > 0. \text{ לכן } x_1 \text{ היא נקודה פנימית.}$$

ב. $f'(x_1)$ אינו מוגדר

לא ייתכן, שכן לפי הנחת המשפט הפונקציה גזירה לכל נקודה פנימית $x \in (a, b)$.

ג. $f'(x_1) = 0$

מכיוון ששני התנאים הקודמים אינם מתקיימים, נובע שאכן $f'(x_1) = 0$. לכן נבחר

$c = x_1$ ונקבל הדרוש.

3. $m < 0$

מראים (באותו אופן כמו במקרה השני) שהנקודה הרצויה היא הנקודה בה מתקבל

המינימום.

שאלה 2

א. מצאו את הגבול: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$, במידה וקיים.

פתרון

מתקיים $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{n \cdot n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ולכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0 \cdot e = 0$$

ב. הוכיחו/הפריכו: כל סדרה חסומה היא סדרת קושי (Cauchy).

פתרון

הפרכה: הסדרה המוגדרת על-ידי האיבר הכללי $a_n = (-1)^n$ היא חסומה, אך אינה סדרת

Cauchy שכן אינה מתכנסת.

שאלה 3

א. הוכיחו שהפונקציה הבאה גזירה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ וחשבו את נגזרתה:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

פתרון

אם $x \neq 0$ ניתן לגזור לפי כללי הגזירה (כי הפונקציה גזירה כהרכבה ומכפלה של פונקציות

$$. f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

עבור $x = 0$ נגזור לפי ההגדרה:

$$f'(0) = \text{st} \left(\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} \right) =$$

$$= \text{st} \left(\Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} \right)$$

מכיוון ש- $\sin \frac{1}{(\Delta x)^2}$ חסום בין (-1) ל- 1 , זהו מספר סופי ולכן $\Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}$ הוא

$$. f'(0) = 0$$

לסיכום:

$$. f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ב. מצאו $\frac{dy}{dx}$ עבור $x = y^4 + y^2 + 1$ ($y \geq 0$).

(ניתן להשאיר את התשובה כפונקציה של y .)

פתרון

נגזור תחילה את x לפי y : $\frac{dx}{dy} = 4y^3 + 2y$. לפי משפט הפונקציה ההפוכה מתקיים

$$. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3 + 2y}$$

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור האם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר:

$$. \text{א. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{10n+5}$$

פתרון

נתבונן באיבר הכללי של הטור: $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{10n+5}$. קל לראות שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ לא

קיים, שכן עבור $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ זוגי נקבל $st(a_H) = -\frac{1}{10}$ ואילו עבור H אי-זוגי נקבל

$$st(a_H) = \frac{1}{10}$$

לסיכום: האיבר הכללי של הטור אינו שואף לאפס ולכן הטור מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad \text{ב.}$$

פתרון

נבדוק תחילה האם הטור מתכנס בהחלט. כלומר נבדוק את התכנסות הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad \text{לכל } n \in \mathbb{N} \text{ מתקיים}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ מתבדר, ולכן לפי מבחן ההשוואה גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ מתבדר.

סיכום ביניים: הטור אינו מתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי.

הסדרה $\left\langle \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right\rangle$ היא יורדת ומתכנסת לאפס. לכן לפי משפט לייבניץ הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad \text{מתכנס.}$$

לסיכום: הטור מתכנס בתנאי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n} \quad \text{ג.}$$

פתרון

נשתמש במבחן השורש.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{ne^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{ne^n}} = \frac{1}{e} < 1$$

לפי מבחן המנה, הטור מתכנס.

שאלה 5

א. יהי I קטע פתוח כלשהו ותהי $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בנקודה $x_0 \in I$. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = (x - x_0)g(x)$ גזירה בנקודה x_0 .

פתרון

נרשום את הגדרת הנגזרת בנקודה x_0 . יהי $\Delta x \neq 0$ אינפיניטסימלי:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \text{st} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{(x_0 + \Delta x - x_0)g(x_0 + \Delta x) - (x_0 - x_0)g(x_0)}{\Delta x} \right) = \\ &= \text{st} \left(\frac{\Delta x \cdot g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} \right) = \text{st}(g(x_0 + \Delta x)) \end{aligned}$$

מכיוון ש- g רציפה ב- x_0 , לפי הגדרת הרציפות מתקיים $\text{st}(g(x_0 + \Delta x)) = g(x_0)$ ולכן

$$f'(x_0) = g(x_0) \text{ ומתקיים גזירה ב-} x_0.$$

ב. תהי f פונקציה רציפה המקיימת $f(x + 2\pi) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו שקיים

$$x_0 \in \mathbb{R} \text{ כך ש-} f(x_0 + \pi) = f(x_0).$$

פתרון

נגדיר פונקציה חדשה $h(x) = f(x + \pi) - f(x)$. זוהי פונקציה רציפה כהפרש של שתי

פונקציות רציפות. נראה שקיימת נקודה x_0 עבורה $h(x_0) = 0$ ומכאן נקבל הדרוש.

לשם כך נשתמש במשפט ערך הביניים.

מתקיים:

$$h(0) = f(0 + \pi) - f(0) = f(\pi) - f(0)$$

$$h(\pi) = f(\pi + \pi) - f(\pi) = f(2\pi) - f(\pi)$$

$$f(2\pi) = f(0 + 2\pi) = f(0).$$

לכן:

$$h(0) = f(\pi) - f(0)$$

$$h(\pi) = f(0) - f(\pi)$$

• אם $f(0) = f(\pi)$ סיימנו, שכן אז מתקיים, למשל, $h(0) = 0$.

• אם $f(0) > f(\pi)$ או $f(0) < f(\pi)$ אזי הביטויים $h(0), h(\pi)$ הם בעלי

סימנים מנוגדים (אחד חיובי ואחד שלילי) ולכן לפי משפט ערך הביניים עבור הקטע

$[0, \pi]$ קיימת נקודה $x_0 \in (0, \pi)$ עבורה מתקיים $h(x_0) = 0$. כלומר:

$$f(x_0 + \pi) - f(x_0) = 0$$

וזה מוכיח את הדרוש.

שאלת בונוס

תהי f פונקציה ממשית המקיימת $|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2$ לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. הוכיחו ש-
 f היא פונקציה קבועה.

פתרון

לפי הנתון מתקיים $\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq |x_1 - x_2|$ (*). נרצה להראות שהנגזרת של f קיימת

ומתאפסת לכל $x \in \mathbb{R}$. יהי $x \in \mathbb{R}$ ויהי $\Delta x \neq 0$ אינפי'.

נציב $x_1 = x + \Delta x$, $x_2 = x$ ב- (*) ונקבל:

$$\frac{|f(x + \Delta x) - f(x)|}{|\Delta x|} \leq |\Delta x|, \text{ כלומר } \frac{|f(x + \Delta x) - f(x)|}{|x + \Delta x - x|} \leq |x + \Delta x - x|$$

מכאן נובע

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right| \leq |\Delta x|$$

הוא אינפי' ולכן גם $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ הוא אינפי' ולכן

$$f'(x) = \text{st} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = 0$$

הנגזרת בנדוקה x קיימת, כלומר

הפונקציה גזירה ומתקיים $f'(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

כעת נותר להראות שהפונקציה קבועה. מראים זאת באמצעות משפט הערך הממוצע (כפי שראינו בהרצאה, כאשר הוכחנו שאם הנגזרת של פונקציה היא חיובית אזי הפונקציה היא עולה וכד').