פונקציות מרוכבות
תרגיל בית מס׳ 9 - פתרון

1. מצאו תחום התכנסות (Region of Convergence - ROC) של הטורים הבאים, כשהכוונה תמיד לתחום ההתכנסות הפתוח המקסימלי.

1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

1.2 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$

1.3 $\sum_{n=0}^{\infty} (iz)^n$

1.4 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2+i}\right)^n$

1.5 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-3}{1+i}\right)^n$

1.6 $\sum_{n=0}^{\infty} (z-1+3i)^n$

1.7 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$

1.8 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+1}$

<u>פתרון</u>:

1.1 טור הנדסי במשתנה מרוכב שמנתו z. התכנסות דורשת מנה $|z|<1$ מנימוק זהה לזה שבמקרה הממשי. גם סכום הטור $\frac{1}{1-z}$ מתקבל בתהליך גבולי זהה לזה שבמקרה הממשי.

1.2 טור הנדסי שמנתו $\frac{z}{2}$. התכנסות דורשת מנה $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, כלומר – $ROC=\{z:|z|<2\}$.

1.3 טור הנדסי שמנתו iz. $ROC=\{z:|iz|<1\}=\{z:|z|<1\}$.

1.4 טור הנדסי שמנתו $\frac{z}{2+i}$. התכנסות בתחום $ROC=\left\{z:\left|\frac{z}{2+i}\right|<1\right\}=\{z:|z|<\sqrt{5}\}$

1.5 הצגה כטור הנדסי מניבה דרישה למנה $\left|\frac{z-3}{1+i}\right|<1$ בכדי שהטור יתכנס, כלומר – $ROC=\{z:|z-3|<\sqrt{2}\}$. שימו לב: טור טיילור סביב מרכז הפיתוח $z_0=3$ של פונקצית הסכום $\frac{1}{1-\frac{z-3}{1+i}}$ הוא זה המתלכד עם טור החזקות (משיקולי יחידות).

1.6 פונקצית הסכום היא $f(z)=\dfrac{1}{1-(z-1+3i)}=\dfrac{1}{2-3i-z}$; הטור הנתון הוא פיתוח טיילור שלה סביב $z_0=1-3i$. $ROC=\{z:\ |z-1+3i|<1\}$.

1.7 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ הוא טור הנדסי עם מנה z^2 . הטור מתכנס, לכן, בתחום $\{z:|z^2|<1\}$, שהוא העיגול $\{z:|z|<1\}$. יש להבחין כי לא ניתן ליישם את מבחן ד'לאמבר ואת מבחן השורש (בגרסתם המוכרת לנו עד כה) לחישוב תחום ההתכנסות של הטור, שכן מקדמי החזקות האי-זוגיות של הטור הם אפסים. האמצעי היחיד שבידינו למציאת תחום התכנסות של הטור הוא, לכן, זיהויו כטור הנדסי.

1.8 $q=\dfrac{z^{3(n+1)+1}}{z^{3n+1}}=z^3$; $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+1}=\dfrac{z^{3\cdot 0+1}}{1-z^3}=\dfrac{z}{1-z^3}$, $ROC=\{z:|z^3|<1\}=\{z:|z|<1\}$.

.2 פתחו את הפונקציות הבאות לטורי מקלורן (טור טיילור סביב $z_0=0$). ציינו את תחום התכנסותם.

.2.1 $f(z)=e^{-z^2}$

.2.2 $f(z)=z^2\sin\left(z^3\right)$

.2.3 $f(z)=\dfrac{1}{z-5}$

.2.4 $f(z)=\dfrac{1}{(z-5)(z-i)}$

.2.5 $f(z)=\dfrac{1}{(z-5)^2}$

.2.6 $f(z)=\dfrac{z^2-(5+2i)z+10i}{z-5}$

<u>פתרון</u>:

.2.1 יש להציב את $-z^2$ בפיתוח e^z לטור מקלורן: $e^{-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-z^2\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{n!}$. פיתוח מקלורן של e^z מתכנס לכל $z\in\mathbb{C}$, לכן תחום ההתכנסות של טור מקלורן הנתון הוא המישור המרוכב כולו.

.2.2

$$z^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{6n+3}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{6n+5}}{(2n+1)!}$$

.2.3

$$\frac{1}{z-5}=\frac{-1}{5\left(1-\frac{z}{5}\right)}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n,\quad \{z:|z|<5\}$$

.2.4

$$\frac{1}{(z-5)(z-i)}=\frac{1}{5-i}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-i}\right)=$$

$$\frac{1}{5-i}\left(-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n-i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right)=\frac{1}{5-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5^{n+1}}-\frac{1}{i^{n-1}}\right)z^n=\frac{1}{-5+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^{n+1}}+(-i)^{n+1}\right)z^n$$

$$ROC=\{z:|z|<\min(|i|,|5|)\}=\{z:|z|<1\}$$

.2.5

$$\left(\frac{1}{z-5}\right)' = -\frac{1}{(z-5)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(z-5)^2} = -\left(\frac{1}{z-5}\right)'$$

ב-2.3 קבלנו: $\frac{1}{z-5} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^{n+1}}$.

אז נקבל: $|z|<5$, $\frac{1}{(z-5)^2} = -\left(\frac{1}{z-5}\right)' = -\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^{n+1}}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, z^{n-1}}{5^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, z^{n-1}}{5^{n+1}}$.

.2.6

$z^2-(5+2i)z+10i=(z-5)(z-2i)$ לכן, $\frac{z^2-(5+2i)z+10i}{z-5} = z-2i$ לכל $z \neq 5$.
פולינום מהווה באופן טריוויאלי טור חזקות (בעל מספר איברים סופי).

.3 פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור סביב $z_1=1$ וסביב $z_2=i$; מצאו תחון ההתכנסות:

.3.1 $f(z)=\frac{1}{z-5}$.

.3.2 $f(z)=\frac{1}{(z-5)^2}$

<u>פתרון</u>:

נשים לב כי $\frac{1}{(z-5)^2} = \left(\frac{1}{z-5}\right)'$.

(i) פיתוח סביב $z_1=1$:

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{-4+(z-1)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{4}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}$$

$$ROC = \left\{z : \left|\frac{z-1}{4}\right| < 1\right\} = \left\{z : |z-1| < 4\right\}$$

$$\frac{1}{(z-5)^2} = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{4^{n+1}}$$

(ii) פיתוח סביב $z_2=i$:

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{(z-i)+i-5} = \frac{1}{(z-i)-(5-i)} = \frac{1}{5-i}\cdot\frac{1}{\frac{z-i}{5-i}-1} = -\frac{1}{5-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{5-i}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(5-i)^{n+1}}$$

$$ROC = \left\{z : |z-i| < dist(i,5)\right\} = \left\{z : |z-i| < \sqrt{26}\right\}$$

$$\frac{1}{(z-5)^2} = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(5-i)^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-i)^n}{(5-i)^{n+1}}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{(5-i)^{n+1}}$$

4. חשבו את:

4.1 $\left.\frac{d^{17}}{dz^{17}}\left(\frac{1}{z-5}\right)\right|_{z=1}$.

4.2 $\left.\frac{d^{14}}{dz^{14}}\left(\frac{1}{z-5}\right)\right|_{z=i}$.

<u>פתרון</u>:

בשאלה 3 קיבלנו פיתוחי טיילור של $f(z)=\frac{1}{z-5}$ סביב $z_1=1$ וסביב $z_2=i$. נזכיר כי המבנה הכללי של טור טיילור סביב $\alpha\in\mathbb{C}$ הוא $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$. לכן:

$$\alpha=1:\quad \frac{f^{(17)}(1)}{17!}=\alpha_{17}=-\frac{1}{4^{18}}\Rightarrow\quad f^{(17)}(1)=-\frac{17!}{4^{18}}$$

$$\alpha=i:\quad \frac{f^{(14)}(1)}{14!}=\alpha_{14}=-\frac{1}{(5-i)^{15}}\Rightarrow\quad f^{(14)}(i)=-\frac{14!}{(5-i)^{15}}$$

5. חשבו את רדיוס ההתכנסות של טורי החזקות הבאים:

5.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n(2n)!}z^n$.

5.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+a^n\right)z^n$.

5.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n)\cdot z^n$.

<u>פתרון</u>:

4.1 נסמן $a_n=\frac{n!}{2^n(2n)!}$. לפי מבחן המנה מתקיים:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{2^n(2n)!}}{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}(2(n+1))!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+2)(2n+1)}{n+1}=\infty$$

. כלומר הטור מתכנס בכל $\mathbb{C}$.

4.2 לפי מבחן השורש: כאשר $a\geq 1$: $\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+a^n}=a\cdot\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{a^n}}=a$; כאשר $a<1$ $\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+a^n}=1$. לכן $R=\min\left\{\frac{1}{a},1\right\}$.

4.3 לפי מבחן השורש: כאשר $a\geq 1$: $\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$, לכן $R=1$.

הסבר: ידוע כי $|\sin n|\leq 1$ ולכן $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}\leq 1$. מצד שני ידוע כי לא קיים גבול $\lim_{n\to\infty}\sin n$. לכן קיים $\varepsilon>0$ וקיימת תת-סדרה $\sin n_k$ כך ש- $|\sin n|>\varepsilon$ (אחרת הגבול היה 0). לכן $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}\geq\limsup_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{\varepsilon}=1$.