שעות קבלה: יום ה' 15-16

(1)

8.3.13

lernik@math.biu.ac.il

מבחן 100%

ספרי לימוד: ... אנליזה פונקציונלית

Eidelman, Milman, Tsolomitis, Functional Analysis

מרחבים לינאריים נורמיים

הגדרה: יהי X מרחב לינארי, X מרחב וקטורי

מעל שדה ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$)

נורמה היא פונקציה ... $\mathbb{C}$

נורמה: $\|x\|$, $x\mapsto$

(i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\|=0 \iff x=0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ משולש

מטריקה (metric) משרה מטריקה $d(x,y)=\|x-y\|$

כדור פתוח: $B(x,r)=\{y\in X \mid \|x-y\|<r\}$

כדור פתוח ברדיוס r

התכנסות: $x_n \to x$ אם $\|x_n-x\|\to 0$

הגדרה

$A \subset X$ נקראת פתוחה אם

$\forall a \in A \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad B(a,\varepsilon) \subset A$

$A \subset X$ נקראת סגורה אם

$\forall \{a_n\} \subset A \quad a_n \to a \implies a \in A$

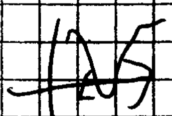
סדרה מתכנסת

דוגמאות

(1) $X = \mathbb{R}^d \qquad x = (x_1, \ldots, x_d) \in X$

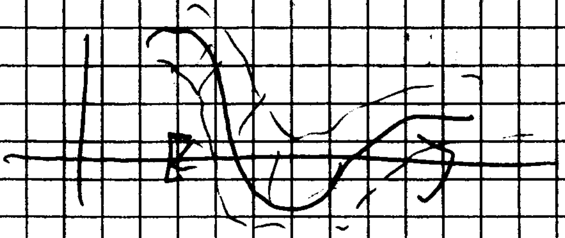
$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2}$$

(2) $X = C(I)$ פונקציות רציפות על קטע סגור I



נגדיר נורמה $f \in X$

$$\|f\| = \max_{t \in I} |f(t)|$$



ε

התכנסות בנורמה

$$\max_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \to 0 \iff f_n \to f$$

התכנסות במידה שווה

1

[illegible] $C(I)$ [illegible]

$$A = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{c} |f(t)| > 1 \\ \forall t \in I \end{array} \right\}$$ [illegible]

$$\left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{c} |f(t)| \geq 1 \\ \forall t \in I \end{array} \right\}$$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $Y \subset X$ [illegible] $\forall y_1, y_2 \in Y \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in Y$

$$X = C([-1,1])$$

$$Y = \{ f \in X \mid f(0) = 0 \} \qquad Y \leq X$$

[illegible] $Y \subset X$ [illegible]

[illegible] Y [illegible] $f_n \to f$

[illegible] $f_n(0) \to f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

[illegible] $C([-1,1])$ [illegible]

$$\mathbb{C}_2[t] = \{ p(t) = at^2 + bt + c \} = Y$$ [illegible]

[illegible] $p_n = a_n t^2 + b_n t + c_n \to g(t)$

$$|c_n - g(0)| \leq \|p_n - g\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow c_n \to g(0) = c$$

[illegible] $a_n \to a$, $b_n \to b$

[illegible] $p_n \to at^2 + bt + c$

[illegible] $|at^2 + bt + c - p_n|$

$$\leq \max |a - a_n| \, |t|^2 + |b - b_n| \, |t| + |c_n - c|$$

$$\leq |a_n - a| + |b - b_n| + |c - c_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\dim C(I) = \infty$

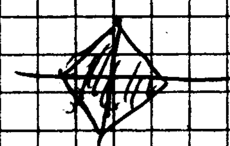
$\{1, x, x^2, \dots\}$

$B(0,1) = B = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$

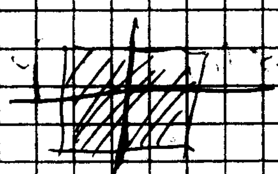
$X = \mathbb{R}^2$

$\ell_2^{(2)} : \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$\ell_1^{(2)} : \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$



$\ell_\infty^{(2)} : \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$



$1 \le p < \infty$

$\ell_p^{(2)} : \|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p}$

$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

$a = \|x\|_\infty = \max |x_i|$

$a = (a^p)^{1/p} \le \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p \le \left(\sum a^p\right)^{1/p} = n^{1/p} a$

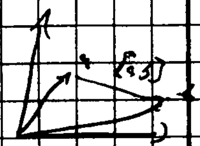
$a \le \|x\|_p \le n^{1/p} a$

$p \to \infty$

הגדרה: X מ"ו $a,b \in X$

$$[a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda) b \mid \lambda \in [0,1]\} \subset X$$

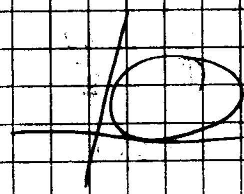
R^2



הגדרה: $Y \subset X$ נקראת קבוצה קמורה אם

$$\forall a,b \in Y \Rightarrow [a,b] \subset Y$$

R^2



דוגמה: X מרחב נורמי $B = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$

אז B קבוצה קמורה

הוכחה: יהיו $a,b \in B$ צ"ל $[a,b] \subset B$

יהי $0 \le \lambda \le 1$ צ"ל $\lambda a + (1-\lambda) b \in B$

$$\|\lambda a + (1-\lambda) b\| \le \|\lambda a\| + \|(1-\lambda) b\| = |\lambda|\|a\| + |1-\lambda|\|b\|$$

$$= \lambda \|a\| + (1-\lambda)\|b\| \le \lambda + 1 - \lambda = 1$$

$\|a\|, \|b\| \le 1$

$$\Downarrow$$

$$\lambda a + (1-\lambda) b \in B$$

הערה: $x \in B \Leftrightarrow -x \in B$

משפט הפוך: יהי X מ"ו

נניח $B \subset X$ קבוצה ש: (1) B קמורה

(2) $x \in B \Leftrightarrow -x \in B$

(3) לכל $a \in X$

$$B \cap \{\lambda a \mid \lambda \ge 0\} = [0, \tilde{a}]$$

צ"ל יש נורמה $\|\ \|$ כך ש $B = \{x \mid \|x\| \le 1\}$

$1<p<\infty$ $\qquad \ell_p^{(d)}$ [illegible]

$\ell_p^{(d)} = \{ x = (x_1, \dots, x_d) \quad x_i \in \mathbb{C} \,|\, \mathbb{R} \}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$ [illegible]

$1\le p<\infty$ $\quad ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \Leftarrow 0<a,b$ (i) [illegible]

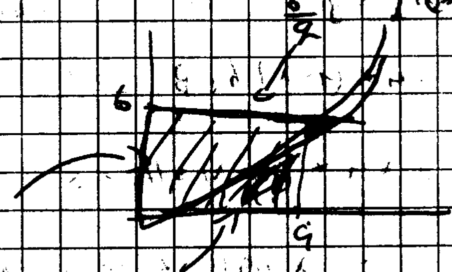
$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ [illegible]

$q = \frac{1}{p-1}+1 = \frac{p}{p-1}$

p	1	$*$	2
q	∞	$\frac{p}{p-1}$	2

$y = f(x) = x^{p-1}$ [illegible]

$x = y^{\frac{1}{p-1}}$



$\int_0^b f(y)\,dy = \frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{q} = \frac{y^q}{q}\Big|_0^b = \frac{b^q}{q}$ $\quad ab$

$\int_0^a f(x)\,dx = \frac{x^p}{p}\Big|_0^a = \frac{a^p}{p}$

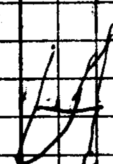
$\frac{a^p}{p} = \int_0^a f(x)\,dx$

$$\left| \sum_{k=1}^{d} x_k y_k \right| \le \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{d} |x_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{d} |x_k|^q \quad (ii)$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$\left| \sum_{k=1}^{d} x_k y_k \right| \le \sum_{k=1}^{d} |x_k y_k|$ [illegible]

$\le \sum_{k=1}^{d} \frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q}$ $\quad$ (i) [illegible]



$= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{d} |x_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{d} |y_k|^q$

(iii) [illegible] $\|x\|_p = 1$ [illegible] $\|y\|_q = 1$

$$\left|\sum_{k=1}^{d} x_k y_k\right| \le 1$$

[illegible] (ii) [illegible]

$$\left|\sum_{k=1}^{d} x_k y_k\right| \le \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{d}|x_k|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{d}|y_k|^q$$

$$= \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(iv) [illegible] $\left|\sum_{k=1}^{d} x_k y_k\right| \le \|x\|_p \|y\|_q$ [illegible]

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (iii) [illegible]

(iii) [illegible] $\frac{x}{\|x\|_p}$ $\frac{y}{\|y\|_q}$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{d} \frac{x_k}{\|x\|_p}\frac{y_k}{\|y\|_q}\right| \le 1 \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{d} x_k y_k\right| \le \|x\|_p\|y\|_q$$

(v) [illegible]

$$\sup_{\{y \mid \|y\|_q \le 1\}} \left|\sum_{k=1}^{d} x_k y_k\right| = \|x\|_p$$

(iv) [illegible] $\boxed{\le}$ [illegible]

[illegible] $1=\|x\|_p$ [illegible] $y_k = \tilde{x}_k |x_k|^{p-2}$ $\|\tilde{x}\|_q = 1$

[illegible] $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|_p}$ [illegible] $\|x\|_p$ [illegible]

(vi) [illegible]

$$\|x+y\|_p \overset{(v)}{=} \sup_{\|z\|_q \le 1}\left|\sum_{k=1}^{d}(x_k+y_k)z_k\right|$$

$$\le \sup_{\|z\|_q \le 1}\left|\sum_{k=1}^{d} x_k z_k\right| + \sup_{\|z\|_q \le 1}\left|\sum_{k=1}^{d} y_k z_k\right|$$

$$\overset{(v)}{=} \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\Rightarrow \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$ [illegible]

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

$$\|x+y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \qquad p \to \infty$$

[illegible]

טענה [illegible] $1 \le p < p' \le \infty$ [illegible]

$$\|x\|_{p'} \le \|x\|_p$$

מסקנה [illegible] $B(\ell_p^{(d)}) \subset B(\ell_{p'}^{(d)})$

[illegible] $\|x\|_p \le 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \le 1$ [illegible] $|x_i| \le 1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d} |x_i|^{p} \le \sum_{i=1}^{d} |x_i|^{p'} \le 1 \Rightarrow \|x\|_{p'} \le 1$ [illegible] $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|_p}$

$\|\hat{x}\|_{p'} \le 1$

$\Downarrow$

$\|x\|_{p'} \le \|x\|_p$

[illegible] ℓ_p [illegible]

$1 \le p < \infty$

$$\ell_p = \{ x = (x_1, x_2, \ldots) \mid \|x\|_p < \infty \}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

[illegible] ℓ_p [illegible]

$$\left(\sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{d} |y_k|^p \right)^{1/p}$$

[illegible] $d \to \infty$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\Downarrow$

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_2 \subset \ell_q \subset \ell_\infty$$

$1 < p < 2 \qquad 2 < q < \infty$

$$\ell_\infty = \{ x = (x_1, x_2, \ldots) \mid \sup_n |x_n| < \infty \}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

$\mathcal{I}$ [illegible]

$C_p(I) = \{ f \mid \int_I |f|^p \}$ [illegible]

$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \right)^{1/p}$

[illegible]

$\left(\int_I |f+g|^p \right)^{1/p} \le \left(\int_I |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_I |g|^p \right)^{1/p}$

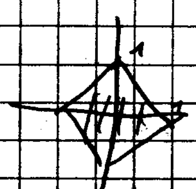
[illegible]

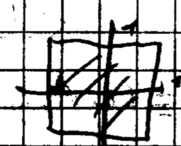
8.4.13

[illegible]

$\mathbb{R}^2 \quad \ell_1^{(2)} \qquad \ell_\infty^{(2)} = \mathbb{R}^2$

$\|(x,y)\| = |x|+|y| \qquad \|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$





[illegible] X Y [illegible]

[illegible] $A : X \to Y$ [illegible]

(1) A [illegible]

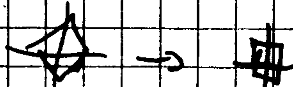
(2) A [illegible] $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 \qquad A(\lambda x) = \lambda A(x)$

(3) A [illegible] $\|x\|_X = \|Ax\|_Y$

[illegible]

$X \cong Y$

[illegible] $\ell_1^{(2)} \cong \ell_\infty^{(2)}$ [illegible]



דוגמא

$\ell_1^{(2)} \not\cong \ell_2^{(\infty)}$

[illegible] מקבילית

משפט: [illegible] $X = \mathbb{R}^n$ [illegible] $X \cong \ell_2^{(n)}$

[illegible]

תרגיל: $\ell_1^{(3)} \not\cong \ell_\infty^{(3)}$



[illegible]

תרגיל: $C[0,1] \cong C[a,b]$

$f(x) \mapsto f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$

תרגיל: $C[0,1] \not\cong \ell_2$

$\{(x_n) \mid \sum |x_n|^2 < \infty\}$

[illegible]

[illegible] ℓ^2 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)$

[illegible] $C[0,1]$

ספרביליות

X מרחב נורמי

הגדרה: $E \subset X$ צפופה אם

$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in E \quad \|x-y\| < \varepsilon$

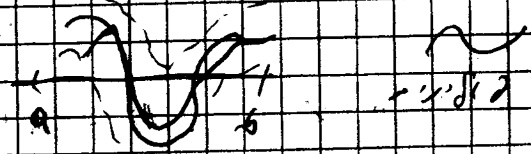
(שקול לכך ש- $B(x,\varepsilon) \cap E \neq \phi$)

דוגמאות: (1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ צפופה

(2) $\mathcal{P} \subset C(I)$ פולינומים

[illegible]

[illegible]



הגדרה: X מרחב מטרי יקרא **ספרבילי**
אם קיימת $E \subset X$ צפופה בת מנייה.

דוגמאות: $\mathbb{R}$ ספרבילי
$C(I)$ ספרבילי: כי קיים $E =$ פולינומים עם מקדמים רציונליים

טענה: ℓ_p ספרבילי עבור $1 \le p < \infty$

רמז: $E = \{$ סדרות רציונליות שכמעט כולן אפס $\}$

טענה: ℓ_∞ לא ספרבילי.

הוכחה: $\ell_\infty = \{$ סדרות חסומות $\}$, $\|x\| = \sup |x_n|$

נסתכל על סדרות מהצורה $x, y = (\pm 1, \pm 1, \dots)$

$\|x\| = 1 \Rightarrow x \in \ell_\infty$

$\|y - x\| = 2$

יש אוסף לא בן מנייה $\{x^i\}$

כדורים זרים $B(x^i, \frac{1}{2})$

$|\mathbb{R}| = |\{x^i\}| = 2^{\aleph_0}$

[illegible]

[illegible]

הגדרה: יהי X מרחב נורמי.
סדרה $\{x_n\} \subseteq X$ נקראת סדרת קושי אם

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N>0 : \forall n>m\geq N : \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

$$\left(\|x_n - x_m\| \to 0, \ (m,n)\to\infty \right)$$

הערה: קל לראות שכל מתכנסת היא סדרת קושי.
ההיפך לא נכון באופן כללי.
(במקרה $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$, $C(\Sigma)$. [illegible] נכון)

הגדרה: X נקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת.
מרחב שלם = מרחב בנך.

טענה: ℓ_p $1\leq p\leq\infty$ שלם.

הוכחה: תהא $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת קושי.
נסמן $x^i = (x^i_j)_{j=1}^{\infty}$

נגדיר את y [illegible]
מועמד:

$$y_k = \lim_{i\to\infty} x^i_k$$

צ"ל ...

נראה

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p^p \to 0$$

$$\Downarrow$$

$\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי

13

לכן $x^{(n)} \to y$ ב- ℓ_p

צריך: $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - y_k|^p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

יהי $\varepsilon > 0$

קיים $N > 0$ כך ש- $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p$; $\forall\, m \ge n \ge N$

נשאיף m לאינסוף ונקבל

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - y_k|^p \le \varepsilon^p$$

(ולכן מתקיים תנאי קושי)

⇓

$$x^{(n)} \xrightarrow[\|\,\|_p]{n} y$$

נראה כי $y \in \ell_p$

צריך: $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$

הערה: בכל מרחב נורמי X, $\{x_n\}$ סדרת קושי, אז $\|x_n\|$ חסומה

הוכחה

$\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| \le \|x_n - x_m\| \to 0$

⇓

$\{\|x_n\|\}$ סדרת קושי

⇓

$\{\|x_n\|\}$ חסומה

לכן $\{x^{(n)}\}$ סדרת קושי ולכן $\|x^{(n)}\|$ חסומה.

⇓

קיים $M > 0$ כך ש-

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)}|^p < M \quad \forall n$$

⇓

$\sum_{j=1}^{\ell} |x_j^{(n)}|^p < M \Leftarrow \sum_{j=1}^{\ell} |x_j^{(n)}|^p < M$

$\sum_{j=1}^{\ell} |x_j^{(n)}|^p < M$ (נשאיף n לאינסוף)

$$\sum_{j=1}^{\ell} |y_j|^p \le M$$

⇓

$y \in \ell_p$

[illegible]

$C_p(I) = \{$ [illegible] $\}$

$$\|f\|_p = \left(\int_I \|f\|^p \, dt\right)^{1/p}$$

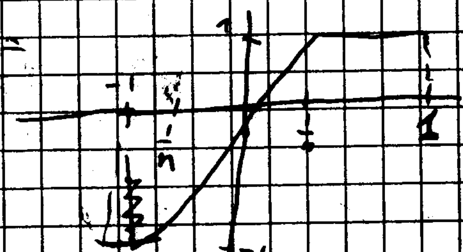
[illegible] $p=1$ $I=[-1,1]$

[illegible] $\{f_n\}$ [illegible]

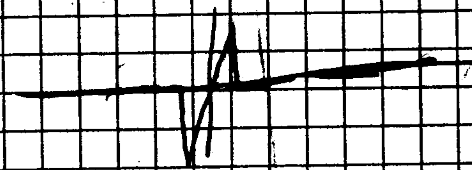
(i) [illegible] $\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)| \, dt \to 0$

(ii) [illegible] $\nexists \lim_{n\to\infty} f_n$

$f_n(t) =$



$f_n - f_m$



$\|f_n - f_m\|$ [illegible]

$f =$

$$\int_{-1}^{1} \|f_n - f\|^p \, dt \xrightarrow{n} 0$$

$f \notin C_1(I)$ [illegible]

[illegible] $C_p(I)$

השלמה של מרחב נורמי

הגדרה: יהי X מרחב נורמי. המרחב הנורמי $\tilde{X}$ יקרא השלמה של X אם:

(1) קיימת איזומטריה $A: X \to \tilde{X}$ לינארית

$$\|x\| = \|Ax\|$$

(2) $\tilde{X}$ שלם

(3) $\operatorname{img} A = \{Ax \mid x \in X\} \subseteq \tilde{X}$ צפופה

הערה: (1) $\Rightarrow$ A חח"ע

משפט (קיום השלמה)

לכל מרחב נורמי X יש השלמה יחידה (עד כדי איזומטריה)

הוכחה (קיום)

נגדיר את $\tilde{X}$: [illegible] $\{x_n\}$

נאמר ש־ $\{x_n\}$ ו־ $\{y_n\}$ שקולות $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$

אם $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

קל לראות שזה יחס שקילות.

נגדיר $\tilde{X} := $ [illegible] $/\sim$

$$\tilde{X} = \left\{ \overline{\{x_n\}} \;:\; \{x_n\} \subset X \text{ קושי} \right\}$$

נגדיר על $\tilde{X}$ פעולות

$$\overline{\{x_n + y_n\}} := \overline{\{x_n\}} + \overline{\{y_n\}} \qquad \text{חיבור וכפל}$$

$$\overline{\{\lambda x_n\}} := \lambda \overline{\{x_n\}} \qquad \text{בסקלר}$$

16

[illegible] $\tilde{X}$ [illegible]

$\|\{x_n\}\|_{\tilde{X}} = \lim_{n} \|x_n\|$

[illegible] $\{x_n\}$

[illegible]

[illegible] X [illegible] $\tilde{X}$

$A: X \to \tilde{X}$

$x \mapsto \overline{(x)_n}$

[illegible] A [illegible]

[illegible]

[illegible] $\tilde{X} \subseteq \overline{\operatorname{Im} A}$ [illegible]

[illegible] $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = \{x_n\}$ [illegible] $\varepsilon > 0$

[illegible] $x \in X$ [illegible] $\|Ax - \tilde{x}\| < \varepsilon$

[illegible] $\{x_n\}$ [illegible] $\tilde{x}$

[illegible] $\|Ax_k - \tilde{x}\| \xrightarrow{k} 0$

$=$

$\|(x_k)_n - (x_n)_n\|$

$=$

$\lim_n \|x_k - x_n\| < \varepsilon$ [illegible]

[illegible] $\{x_n\}$ [illegible]

(2) המשך: $\tilde{X}$ שלם

הוכחה: תהא $\{\tilde{x}_i\} \subset \tilde{X}$ סדרת קושי

צ"ל: מתכנסת

$\{\tilde{x}_i\}$ סדרת קושי

עבור $\tilde{x}_i$ כל $\tilde{y}$ ... $\exists x_n$ $x_n \in X$

קיים כך ש $\|Ax_n - \tilde{x}_n\| < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \{x_n\} \subseteq X$ סדרת קושי כי

כי: $\|x_n - x_m\| = \|Ax_n - Ax_m\|$

$\le \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \longrightarrow 0$

$(m,n) \to \infty$

נגדיר $\tilde{x} = \overline{(x_n)_n} \in \tilde{X}$ ונראה $\|\tilde{x}_n - x\| \to 0$

הוכחה

$\|\tilde{x}_k - \tilde{x}\| \le$

$\le \|\tilde{x}_k - Ax_k\| + \|Ax_k - \tilde{x}\|$

$\le \frac{1}{k} + \varepsilon_k \xrightarrow{k} 0$

(3)
22.4.13

יחידות השלמה

משפט: ... ההשלמה יחידה

$X_1 \xrightarrow{A_1} A_1(X) \subset \tilde{X}_1$

$X \xrightarrow{A_2} A_2(X) \subset \tilde{X}_2$

צ"ל: $\tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$

(ליניארי, על, חח"ע, איזומטרי
...
...)

18

$$A_2(X) \cong X \cong A_1(X)$$

[illegible] $A_1(X) \to A_2(X)$ V [illegible]

[illegible]

[illegible] Y_1, Y_2 [illegible]

$Z_2 \subset Y_2$, $Z_1 \subset Y_1$ [illegible]

$V: Z_1 \to Z_2$ [illegible]

[illegible] $\tilde{V}: Y_1 \to Y_2$ [illegible] V [illegible]

$$\tilde{V}|_{Z_1} = V$$

[illegible]

[illegible] $y_1 \in Y_1$

[illegible] $Z_1 \subset Y_1$ [illegible]

[illegible] $\{z_k\} \subset Z_1$ $z_k \to y_1$

$\Leftarrow$ $\{V(z_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset Z_2$ [illegible] V [illegible]

$\Leftarrow$ $V(z_k) \to y_2$ [illegible] Y_2 [illegible]

[illegible] $\tilde{V}(y_1) = y_2$

[illegible]

(3) 19

[illegible]

(4) $X = $ [illegible] I

$\|\varphi\| = \sup_{t \in I} |\varphi(t)|$ $\sup$ [illegible]

(i) X [illegible] $\sim$ [illegible]

(ii) $\tilde{X} \simeq C(I)$

(2) $C_p(X) = \{ f \ \text{[illegible]}\ I \}$ $1 \le p < \infty$

[illegible] $\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$

(i) $C_p(X)$ [illegible]

(ii) סימון $\tilde{C}_p = L^p(I)$

$$\left\{ f \ \text{[illegible]}\ \ \int_I |f(x)|^p \, dx < \infty \right\} \Big/ \sim$$

$\tilde{C}(I) \in$ [illegible] $1 \le$ $C(I)$ [illegible] $f_n \to f$ [illegible] f_n [illegible] f [illegible]

קומפקטיות

במרחב של $\mathbb{R}^d$

כל סדרה חסומה $\{x_n\}$ $\|x_n\| \le M$ $\forall n$

יש לה תת סדרה מתכנסת $x_{n_j} \to x$ $\exists$

דוגמא (לא קומפקטי במימד אינסופי)

$$\ell_2 = \{x=(x_k) \mid \sum |x_k|^2 < \infty\}$$

עם הנורמה $\|x\|^2 = \sum |x_k|^2$

נבחר $e_1 = (1,0,\dots,0)$

$e_2 = (0,1,0,\dots)$

$\vdots$

$\{e_k\}$ סדרה חסומה $\|e_k\| \le 1$

אבל אין לה תת סדרה מתכנסת כי אין לה סדרת קושי

כי $\|e_k - e_j\| = \sqrt{2}$

הגדרה: מרחב X נקרא קומפקטי אם

$E \subset X$ נקרא קבוצה קומפקטית אם

לכל סדרה $\{x_n\} \subset E$ יש תת סדרה

מתכנסת $x_{n_j} \to x \in X$

21

טענה: E קומפקטית $\Rightarrow$ E חסומה

הוכחה: אם E לא חסומה אז

$\{x_n\} \subset E \quad \|x_n\| \to \infty$

∞

$B(0,1) \subset C(I)$

$B(0,1) \subset L_p(I)$

$f_n =$

$\notin C(I)$

$\|f_n\| = 1$

$\|f_m - f_n\| =$

$E \subset X$

$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z_1 \dots z_n \quad E \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(z_j, \varepsilon)$

E

$\varepsilon > 0$

$x_1 \in E \qquad E \subset B(x_1, \varepsilon)$

$x_2 \in E \setminus B(x_1, \varepsilon) \Rightarrow \|x_2 - x_1\| \geq \varepsilon$

$x_n \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B(x_k, \varepsilon) \qquad \|x_n - x_k\| \geq \varepsilon$

[illegible]

[illegible] $\{x_n\} \subset E$

[illegible] $\|x_k - x_\ell\| \ge \varepsilon \quad \forall k \ne \ell$

[illegible] E

$\boxed{\Leftarrow}$ [illegible] $\varepsilon > 0$

[illegible] E [illegible]

[illegible] E.

$\tilde{B}$ E [illegible]

[illegible] $\{x_n\} \subseteq E$ [illegible] $\tilde{B}$ [illegible]

עבור $\varepsilon = 1$ [illegible] E [illegible] $\frac{1}{2}$

[illegible] B_1

$S_1 = B_1 \cap \{x_k\} \subset E$ [illegible]

עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$ [illegible] $\frac{1}{4}$

$S_2 = B_2 \cap S_1$ [illegible]

$\{x_k\}$

עבור $\varepsilon = \frac{1}{4}$ [illegible]

$S_n = B_n \cap S_{n-1}$ [illegible]

$S_n \subset B_n \cap B_{n-1} \cap \dots \cap B_1$

$\{x_k\}$ [illegible] B_n [illegible] $\frac{1}{n}$

[illegible] $\{x_{n_j}\}$ [illegible] $x_{n_j} \in S_j$

$\|x_{n_j} - x_{n_k}\| \le \frac{2}{j}$

$j < k$

23 [illegible] $\{x_{n_j}\} \Leftarrow$ [illegible] $\{x_{n_j}\} \Leftarrow$

[illegible] X [illegible]

[illegible] E [illegible] $E=\bigcup_{j=1}^{N} B(z_j,\varepsilon)$

$\forall x \in E \quad \min_{1\le j\le N} \|x-z_j\| < \varepsilon$

[illegible] $\{z_i\}_{i\in I}$ [illegible] ε [illegible] E

$\forall x\in E \quad \inf_{i\in I} \|x-z_i\|<\varepsilon$

[illegible] E [illegible] $\Longleftrightarrow$ [illegible] $\varepsilon>0$ [illegible] ε [illegible]

[illegible] $C(I)$: $\|f-g\| = \sup_{x\in I} |f(x)-g(x)|$

[illegible] $E=\{f\}\subset C(I)$ [illegible]

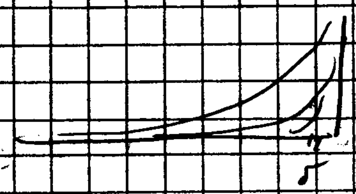
[illegible] $\varepsilon>0$ [illegible] $\delta>0$ [illegible]

$\forall f\in E \quad : |t_1-t_2|<\delta \Rightarrow |f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon$

24

דוגמא $\{t^n\} \subseteq C[0,1]$

טענה: סדרה חסומה ושאינה אקו"ר



כי

δ תלוי ב-n

לא במידה שווה

דוגמא $E=\{f \mid |f'(x)| \le 10\} \subset C[0,1]$

נבחר δ בשביל $\delta = \frac{\epsilon}{10}$

$$|f(t_1)-f(t_2)| \le (t_2-t_1) f'(c) \le \delta \cdot 10 = \epsilon$$

$t_1 < c < t_2$

$\Downarrow$

E רציפה במ"ש

משפט (ארצלה)

$E \subset C(I)$ אזי E מוכל קומפקטית $\iff$ (i) E חסומה במ"ש (ii) E רציפה במ"ש

הגדרה: E חסום במ"ש $\iff$

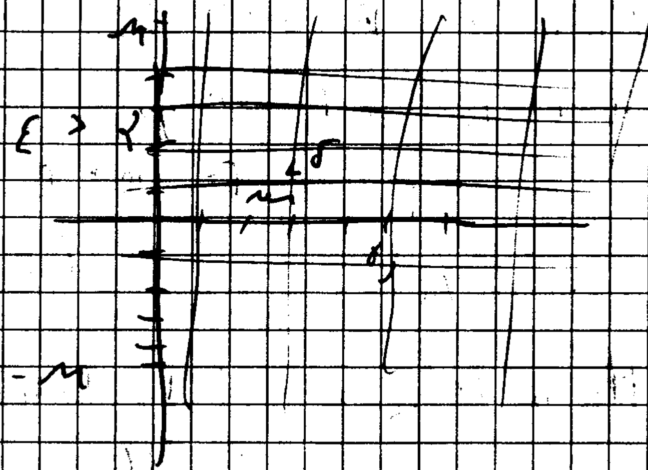
$\Downarrow$

$\exists M$, $\forall f \in E$, $\forall x \in I$ $|f(x)| \le M$

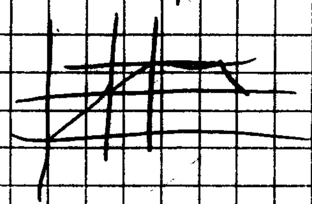
[illegible] ε [illegible] δ-ε

25 [illegible] ε [illegible]

[illegible]



[illegible]



[illegible] $C[I] \subset \{f_i\}$ [illegible]

[illegible] $\{f_i\}$ [illegible] f E

$g \in E$ [illegible] $\varepsilon >$ [illegible] 

$[\ell,\ \ell_{j+1}]$ [illegible] f_i [illegible] g [illegible]

$\Downarrow$

$\sup_I |g(x) - f_i(x)| < \varepsilon$

E [illegible]

26

$\{g_i\}_{i=1}^{n}$

f_i

$\|f - g_k\| < \varepsilon$ g_k $f \in E$

$|t_1 - t_2| < \delta_k \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)|$

$\leq |f(t_1) - g_k(t_1)| + |g_k(t_1) - g_k(t_2)| + |g_k(t_2) - f(t_2)|$

$\leq 2\|f - g_k\| + \varepsilon = 3\varepsilon$

$C[0,1]$

$\frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(c)$ $\quad c \in [0,t]$

$E = \{ f \mid f(0) = 0, \ \|f'(t)\| < 10 \}$ $\quad Z = [0,1]$ (1)

$|f(t)| = |f'(c)||t| \leq |f'(c)| \leq 10$

$\delta = \frac{\varepsilon}{10}$ $\quad \varepsilon > 0$

$|f(t) - f(s)| = |f'(c)||t-s| < 10\delta = \varepsilon$

$E = \{ f \mid f(0) = 0, \ \underbrace{\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leq 100}_{\|f'\|_2 < 10} \}$ (2)

$|f(x) - f(0)|$

$= |\int_0^x 1 \cdot f'(t)dt|$

$\leq \int_0^x |1 \cdot f'(t)| dt$

$\leq \|1\|_2 \|f'\|_2 \leq 1 \cdot 10$

$|f(x)| \leq 10 + |f(0)|$

$E = \{ f \mid |f(0)| \leq 100, \ \|f'\|_p \leq 10 \}$ (3)

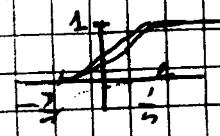
$p > 1$

$0 < a < b \leq 1$

$|f(b) - f(a)| = |\int_a^b f'| \leq (\int_a^b 1^q)^{1/q} (\int_a^b |f'|^p)^{1/p}$

$\leq (b-a)^{1/q} \cdot 10$

[illegible] X

$\int_0^1 f_n' \le 2$  $f_n =$ 

$\{f_n\} \to$ [illegible] $f \notin C_2[\ldots]$ $\int f = f(0) - f(1) + 1$

[illegible] X [illegible]

$K \subset X$ [illegible]

(1) K [illegible]

(2) K [illegible]

$(\Rightarrow)$ $\{x_n\} \subset K$ [illegible]

[illegible] K

$(\Leftarrow)$ K [illegible]

[illegible] M

(1) $E = \{ f \mid f(0)=0 \ , \ |f'(t)| \le M \} \subset C[0,1]$

[illegible]

$K = \{ f \mid f(0)=0 \ \ |f(t)-f(t')| \le M|t-t'| \}$

$E \subset K$

הוכחה: $K = \bar{E}$

$\bar{E} = \{x \in X \mid \exists (y_n) \subseteq E,\ y_n \to x\}$

$\Leftarrow$ לפי Arzela, K סגור וחסום

(i) K שווה רציפות:

לכל $\varepsilon > 0$ נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

$|t-t'| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| \le M|t-t'| < M\delta = \varepsilon$

$\forall f \in K: \ \|f(t)\| \le M|I|$

(ii) חסום:

$|f(t)| \le |f(0)| + |f(t) - f(0)| \le 0 + Mt \le M|I|$

K סגור $\Leftarrow$

$f_n \to f$, $f \in K$

$|f(t) - f(s)| \le |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(s)| + |f_n(s) - f(s)| \le 2\varepsilon + M|t-s| \to M|t-s|$

$f_n \to f$ ב־ K

(i), (ii) $\Leftarrow$ K קומפקטי

32

[illegible] [illegible] ℓ_2

(1) [illegible] $K = \{x \in \ell_2 \mid |x_n| \le \frac{1}{n} \; \forall n\}$

[illegible] K [illegible]

$x^n_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$

$\|x^n - x^m\| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} \to \infty$

(2) $E = \{x \in \ell^2 \mid |x_n| \le \frac{1}{n^2} \; \forall n\}$

[illegible]

(1) [illegible] $x \in K$ $\|x\| \le \sum \frac{1}{n^2}$

$\|x - y\| \le \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2 + \varepsilon \le 2\varepsilon$

[illegible] $f : K \to \mathbb{R}$ [illegible]

[illegible] f [illegible] K

$m = \sup_{x \in K} f(x)$ [illegible] $m \in f(K)$

[illegible] $\{x_n\} \subset K$ $f(x_n) \to m$

[illegible] $\{x_{n_j}\}$ $x_{n_j} \to x \in K$

[illegible] $f(x_{n_j}) \to f(x)$

$\to m$

[illegible]

$\mathbb{C} \to X \times X$ [illegible]

(i) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

(ii) $\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \alpha_1 \langle f_1, g \rangle + \alpha_2 \langle f_2, g \rangle$

(iii) $\langle f, f \rangle \geq 0$, $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$

[illegible]

$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$

$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ [illegible]

$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \\ g_n \to g \end{array}\right\} \Rightarrow \langle f_n, g_n \rangle \to \langle f, g \rangle$

[illegible]

29.4.13

דוגמא: $\mathbb{R}^d$ או $\mathbb{C}^d$

[illegible]

$$\underset{(x_1,\dots,x_d)}{\langle x}, \underset{(y_1,\dots,y_d)}{y\rangle} = \sum_{k=1}^{d} x_k \bar{y}_k$$

דוגמא: ℓ_2

[illegible] $x=(x_k)$, $y=(y_k)\in \ell_2$ $\left(\sum_k x_k^2<\infty,\ \sum_k y_k^2<\infty\right)$

[illegible] $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j$ [illegible]

$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j \bar{y}_j| \le \sqrt{\sum_k |x_k|^2}\sqrt{\sum_k |y_k|^2}$$

[illegible] $\mathbb{C}^N$ [illegible]

דוגמא: $C_2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$

$\{e^{ikt}\}$

[illegible] $f,g\in L^2(\mathbb{T})$

$f_n,g_n\in C(\mathbb{T})$, $f_n\to f$, $g_n\to g$ [illegible]

$$\Rightarrow \langle f,g\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}} f_n(x)\overline{g_n(x)}\,dx$$

[illegible]

$\|f_n\|\to\alpha$ [illegible] $\big|\|f_n\|-\|f_m\|\big| \le \|f_n-f_m\| \to 0$

[illegible] $\left|\int_{\mathbb{T}} f_n \bar{g}_n\right| \le \|f_n\|\|g_n\| \to \alpha\beta < \infty$

$16-20$

הערה: מרחב מכפלה פנימית הוא גם מרחב נורמי
כי ש, הנורמה משרה מטריקה

טענה: הנורמות C_p L_p ℓ_p $p\neq 2$ לא מושרות ממכפלה פנימית

(כלל) חוק המקבילית עם

טענה (במרחב מכפלה פנימית)

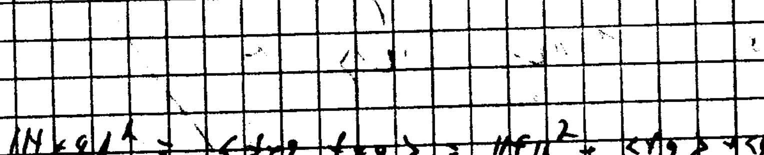
במרחב מכפלה פנימית $\forall f,g$ $\quad \|f+g\|^2+\|f-g\|^2$
$$= 2(\|f\|^2+\|g\|^2)$$

הוכחה:

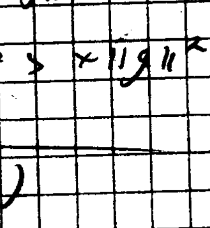
$$\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \|f\|^2 + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \|g\|^2$$
$$+\quad \|f-g\|^2 = \langle f-g, f-g\rangle = \|f\|^2 - \langle f,g\rangle - \langle g,f\rangle + \|g\|^2$$

$$2(\|f\|^2+\|g\|^2)$$

נראה ש $C[0,1]$ לא ...



$$\|f\| = \|g\| = 1$$
$$\Leftarrow \quad \|f-g\| = \|f+g\| = 1$$
$$2(1^2+1^2)$$



$p \neq 2$

$\|\cdot\|_p$

$e_1 = (1,0,\dots,0)$

$e_2 = (0,1,0,\dots)$

$\|e_1 + e_2\|^2 = 2^{2/p}$

$\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 = 2$

$C_p[0,1]$ $\quad f = x \quad g = 1$

$\|f\|_p = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}$ $\quad \|f+g\|_p^2 = \left(\frac{2^{p+1}-1}{p+1}\right)^{2/p}$

$\|g\|_p = 1$ $\quad \|f-g\|_p^2 = \left(\frac{(-1)^{p+2}}{p+1}\right)^{2/p}$

$(X, \|\cdot\|)$

$\Leftrightarrow$

$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left[\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\right]$

$f \perp g$ $\quad \langle f,g\rangle = 0$

$f \perp g \Rightarrow \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$

34

X

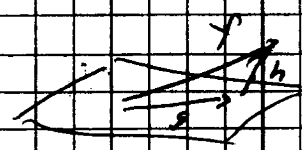
$Y \subseteq X$

$f \in X$

$f \perp Y \quad (f \in Y^{\perp})$

$\forall g \in Y : \langle f, g \rangle = 0$

$f \in X$



$f = g + h$

$g \in Y, \quad h \in Y^{\perp}$

$X = C_2[-1,1]$

$Y = \{ g \in X \mid g|_{[-1,0]} = 0 \}$

Y

$f(t) = 1$ $\qquad$ $f = g + h$, $g \in Y$, $h \in Y^{\perp}$

$g_n \to g \quad \Rightarrow \quad \int |g_n - g|^2_{\ldots}$

$g|_{[-1,0]} \equiv 0 \qquad \int_{-1}^{0} g^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{0} |g|^2 + \int |g_n - g|^2 dt$

$h = \qquad \langle 1_{[0,1]}, h \rangle = 0 \qquad \int_0^1 h^2 dt$

$g|_{[-1,1]} = 1$

הגדרה: X מרחב מכפלה פנימית, Y תת מרחב ... 35

דוגמאות: $\mathbb{R}^d$ $\mathbb{C}^d$ ℓ_2 $L_2(I)$ (לא שלם: $C_2(I)$)

משפט: H מרחב הילברט, $Y \subset H$ תת מרחב סגור.

אזי $H = Y \oplus Y^{\perp}$

כלומר $\forall f \in H$ $f = g + h$, $g \in Y$, $h \in Y^{\perp}$

(יחיד ... g ... f ... Y)

הוכחה: יחידות: $f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$

$\Downarrow$

$Y \ni g_1 - g_2 = h_2 - h_1 \in Y^{\perp}$

$\Downarrow$

$g_1 - g_2 = 0 = h_2 - h_1$

קיום: [illegible]

$g \in Y$ [illegible]

$\|f - g\| = \inf_{y \in Y} \|f - y\|$

$= d(f, Y)$

(הוכחנו ... $g \in Y$ ... [illegible])

[illegible] X [illegible]

$Y \subset X$ [illegible] ([illegible]) $f \in X$

(i) [illegible] $f = g + h$, $g \in Y$, $h \in Y^{\perp}$

[illegible] g [illegible] $\|f - g\| = d(f, Y)$

(ii) [illegible]

[illegible] g [illegible]

$f = g + h$, $g \in Y$, $h \in Y^{\perp}$

(ii) ⇒ (i) $f = g + h$, $g \in Y$, $h \in Y^{\perp}$

[illegible] $\ell \in Y$

$$\|f-\ell\|^2 = \|(f-g) + (g-\ell)\|^2 = \|f-g\|^2 + \|g-\ell\|^2 \geq \|f-g\|^2$$

$\ell \neq g \to$ [illegible] $\|g-\ell\| \neq 0$

$$\|f-g\|^2 < \|f-\ell\|^2$$

$$\|f-g\| = d(f, Y)$$

(i) ⇒ (ii) [illegible] $\|f-g\| = d(f, Y)$

$f = g + f - g$

[illegible] $f-g \in Y^{\perp}$

⇒ [illegible] $f-g \notin Y^{\perp}$ ⇒ $\langle f-g, \ell\rangle \neq 0$ $\exists \ell \in Y$

$$\Rightarrow \|f - (g+\varepsilon\ell)\|^2 = \|f-g-\varepsilon\ell\|^2 = \|f-g\|^2 + \varepsilon^2\|\ell\|^2 - 2\varepsilon\ldots$$

$< \|f-g\|^2$ [illegible] $\varepsilon \to 0$ [illegible] ε^2 [illegible]

[illegible]

37

יהי H מרחב הילברט

$Y \subset H$ תת מרחב סגור

אזי לכל $f \in H$ קיים יחיד

$g \in Y$ כך ש

(ראה [illegible])

הוכחה: נבחר סדרה $\{g_n\} \subset Y$ כך ש

$$\|f - g_n\| \longrightarrow \rho = d(f, Y)$$

(קיים כי $\inf$)

נראה ש $\{g_n\}$ סדרת קושי

$$2(\rho^2 + \rho^2)$$

$$2\left(\|f - g_n\|^2 + \|f - g_m\|^2\right)$$

$$= \|(f - g_n) + (f - g_m)\|^2 + \|(f - g_n) - (f - g_m)\|^2$$

$$= \|2f - g_n - g_m\|^2 + \|g_m - g_n\|^2$$

$$= 4\left\|f - \frac{g_n + g_m}{2}\right\|^2 + \|g_n - g_m\|^2$$

$$\geq 4\rho^2$$

$$0 \leq \|g_n - g_m\|^2 = -4\left\|f - \frac{g_n + g_m}{2}\right\|^2 + 2(\quad)$$

$$\leq -4\rho^2 + 2(\quad) \longrightarrow -4\rho^2 + 4\rho^2 = 0$$

$\{g_n\}$ סדרת קושי

$g_n \to g$

$g \in Y$

$\|f - g_n\| \longrightarrow \|f - g\| = \rho$

$(X, \|\cdot\|)$

$Y \subset X$, $\dim Y = d < \infty$

$\ell_1, \dots, \ell_d \in Y$

$\forall y \in Y \;\; \exists! \;\; y = \sum_{k=1}^{d} c_k \ell_k$

$\vec{c} = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^d$

$\mathbb{R}^d \longrightarrow Y$

$\vec{c} \longmapsto \sum^{d} c_k \ell_k$

$\|y\|_Y$

39

$f: \mathbb{R}^d \to Y$ [illegible]

$\|\vec{c}\|_{\mathbb{R}^d} = 1$ [illegible]

$\tilde{c} = \frac{\vec{c}}{\|c\|}$

$f\left(\frac{c}{\|c\|}\right) = \frac{1}{\|c\|} f(c)$

$\tilde{y}$ $\qquad \|\tilde{y}\| = \frac{1}{\|c\|} \|y\|_Y$

$\frac{1}{\|c\|} \|c\|_{\mathbb{R}^d}$

$B(0,1) \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$\vec{c} \to f(\vec{c}) = \|y\|_Y$

$\|\vec{c}\| = 1$

[illegible] f [illegible]

$$\left| f(\vec{c} + \Delta\vec{c}) - f(\vec{c}) \right|$$

$$= \left| \left\| \sum c_k + \Delta c_k\, e_k \right\| - \left\| \sum_k c_k e_k \right\| \right|$$

$$\leq \left\| \sum \Delta c_k\, e_k \right\|$$

$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

$$\leq \sum_k |\Delta c_k|\, \|e_k\|$$

$$\leq \left(\sum_k |\Delta c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\sum_k \|e_k\|^2} \right) \leq \|\Delta c\|_2\, C$$

f [illegible] $\Leftarrow \|\Delta c\|_{\mathbb{R}^d} \to 0$

$\forall \vec{0}$ $K = B(0,1) = \{\vec{c} \mid \|c\|_{\mathbb{R}^k} = 1\}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] f [illegible]

$\Downarrow$

$M = \max f|_K$ [illegible]

$m = \min f|_K$

$\Downarrow$

$\|\vec{C}\| = 1$ [illegible]

$$\frac{m}{1} < \frac{\|f(c)\|_Y}{\|C\|_{\mathbb{R}^k}} < \frac{M}{1}$$

$0 < m$ [illegible]

$m = 0$ [illegible]

$\Downarrow$

$\exists\, c_0 \in K$ [illegible] $f(c_0) = \|y_0\|_Y = 0$

$\Downarrow$

$y_0 = 0$

$\Downarrow$

$c_0 = 0$ [illegible] K [illegible]

[illegible] (f^{-1}) [illegible]

[illegible] $\{x_n\} \subseteq X$ [illegible] $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ $\|f^{-1}(x_n) - f^{-1}(x_m)\|$

[illegible] $\{f^{-1}(x_n)\}$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(x_n)$ [illegible]

$\Leftarrow$ $f^{-1}(x_n) \to f^{-1}(x)$ [illegible] f [illegible]

$x_n \to x$ $\Leftarrow$ $\|x_n - x\| \le M \|f^{-1}(x_n) - f^{-1}(x)\| < M\varepsilon$

מסקנה: כל הנורמות [illegible] $(V, \|\cdot\|)$

מרחב סוף ממדי [illegible] שלם

מסקנה: [illegible] V [illegible] $\mathbb{R}^d$ [illegible]

[illegible] $\mathbb{R}^d$ [illegible] שלם

הוכחה: (i) [illegible] X [illegible]

(ii) [illegible]

הוכחה: (i) $\|x_n\| < C$ ⟸ $\|f^{-1}(x_n)\|_d$ ⟸ $\{f^{-1}(x_n)\}$ [illegible] $\mathbb{R}^d$

⟸ [illegible] $\{f^{-1}(x_{n_k})\}$ [illegible] $\|x_{n_k} - x\| \le \|f\| \cdot \|f^{-1}(x_{n_k}) - f^{-1}(x)\| \to 0$

⟸ $\{x_{n_k}\}$ [illegible] (ii) [illegible]

דוגמה: $\mathbb{R}_n[x] \subset C(I)$ [illegible] n

[illegible] $\{p_k\} \subset \mathbb{R}_n[x]$ [illegible] $p_k \to f$

[illegible] $f \in \mathbb{R}_n[x]$

[illegible] $\mathbb{R}_n[x]$ [illegible]

⟸ $\{p_k\}$ [illegible] $\mathbb{R}_n[x]$

[illegible] $f \in \mathbb{R}_n[x]$ [illegible]

הגדרה: $(X, \|\cdot\|)$ [illegible]

[illegible] $Y \subset X$ [illegible] Y [illegible]

[illegible] $\{x_n\}$ [illegible] Y [illegible]

$\{x_n\}$ [illegible] Y

[illegible] Y [illegible]

[illegible] $(X, \|\cdot\|)$ [illegible]

$Y \subset X$ [illegible] $\dim Y = d < \infty$

$f \in X$ [illegible] f

[illegible] $g \in Y$

[illegible] $\{x_n\} \subseteq Y$

$d(f, Y) = \rho \leftarrow \|f - g_n\|$

$\{g_n\}$ [illegible] $\|g_n\| \le \|f - g_n\| + \|f\| < M$

[illegible] Y [illegible]

[illegible]

$g_{n_j} \to g$

$\rho = \|f - g\|$

$g \in Y$

[illegible] Y [illegible]

[illegible]

[illegible] $X = C[0,1]$

$f(t) = t$ $\quad Y = \{x(t) = \alpha t \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{t\}$

$\dim Y = 1$

[illegible] $f(t) \equiv 1$ [illegible] $d(f, Y)$

[illegible]

$d(f, Y) = 1$

$f \in Y$ [illegible]

[illegible]

$$X = C(I)$$

$$Y = P_N = \left\{ p(t) = \sum_{j=0}^{N} a_j t^j \right\}$$

$$\dim Y = N+1$$

[illegible]

[illegible] $f \in X$

[illegible] $p \in P_N$ [illegible]

61 44

13.5.13

בסיסים אורתונורמליים

הגדרה: X ממ"פ

$\{v_1, \dots, v_n\}$ יקרא בסיס אורתונורמלי

אם $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

דוגמה: $\mathbb{R}^d$ עם $\{e_1, \dots, e_d\}$

לכל $f \in \mathbb{R}^d$ $\Leftarrow$ $f = \sum_{k=1}^{d} c_k e_k$

כאשר $c_k = \langle f, e_k \rangle$

* הגדרה: יהי X ממ"פ, $\dim X = \infty$

$\{e_1, e_2, \dots\}$ יקרא בסיס אורתונורמלי

אם $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

שאלה: האם לכל $f \in X$ מתקיים $f = \sum_{k=1}^{\infty} c(k) e_k$

תשובה: אם $f = \sum_{k=1}^{\infty} c(k) e_k$ אזי

(א) המקדמים יחידים

(ב) $c(k) = \langle f, e_k \rangle$

[illegible]

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} c(k)\, e_k$$

$$\|f - S_N\| \xrightarrow{N\to\infty} 0 \quad \text{[illegible]}$$

(1)

$$\langle S_N, e_k \rangle \xrightarrow{N\to\infty} \langle f, e_k \rangle$$

$$\|$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} c(i)\, e_i, e_k \right\rangle$$

$$\|$$

$$\sum_{i=1}^{N} c(i) \langle e_i, e_k \rangle = c(k) \langle e_k, e_k \rangle = c(k)$$

[illegible] $k < N$ [illegible]

$$\Downarrow$$

$$c(k) = \langle f, e_k \rangle$$

$$\Downarrow$$

(4) [illegible]

[illegible]

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$$

f [illegible]

46

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k$$

$$E_N = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_N\}$$

$$\dim E_N = N$$

[illegible] S_N [illegible]

[illegible] f [illegible] E_N [illegible]

$h_N = f - S_N$

$$f = S_N + h_N \qquad S_N \perp h_N$$

$$E_N \qquad E_N^{\perp}$$

$$\|h_N\| = \|f - S_N\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

[illegible]

$$\|f\|^2 = \|S_N + h_N\|^2 = \|S_N\|^2 + \|h_N\|^2$$

מכיוון

$$\Downarrow$$

$$\|S_N\|^2 \le \|f\|^2$$

[illegible] S_N [illegible] $N \to \infty$

$$\|S_N\|^2 \le \|f\|^2$$

$$\| $$

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle f, e_k\rangle|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \le \|f\|^2$$

מסקנה

$$\|S_N\|^2 \to \|f\|^2 \iff \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f\|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\|f\|^2 - \|S_n\|^2 = \|h_n\|^2 \to 0 \iff \|h_n\| \to 0$$

$$\Updownarrow$$

$$S_n \to f \iff \|f - S_n\| = \|h_n\| \to 0$$

הגדרה X מרחב נורמי (ספרבילי)

בסיס שאודר סדרה $\{x_1, x_2, \dots\} \subset X$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k \;\middle|\; N\in\mathbb{N},\ \alpha_k\in F \right\}$$ צפופה

ב-X

$X = C[3]$

$\{1, x, x^2, \dots\}$

משפט

X

$\{e_1, \dots\}$

$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k \qquad f \in X$

(פרסבל)

$\|f\|^2 = \sum_k |\langle f, e_k \rangle|^2$

הוכחה

$S_N = \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k$

$\|f - S_N\| \xrightarrow{N \to \infty} 0$

יהי $\varepsilon > 0$

$\{e_1, \dots\}$ שלמה

$y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k \in E_m \subset E_N$

$\|f - y\| < \varepsilon$

$\forall N \geq m : \|f - S_N\| \leq \|f - y\| < \varepsilon$

S_N E_N

$X = C_2([-\pi,\pi])$ דוגמא

(השלמה $L^2[-\pi,\pi]$)

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

טענה: $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ אורתונורמלית

$$e_n(t) = e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,\overline{e^{imt}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(n-m)}\,dt$$

$$= \begin{cases} 1 & n = m \\ \left.\dfrac{e^{it(n-m)}}{i(n-m)}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & n \neq m \end{cases}$$

טענה: $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ אורתונורמלית שלמה ב- $C_2(\mathbb{T})$

$= \{ f \in C_2[-\pi,\pi] \mid f \text{ מחזורית } 2\pi \}$

$$\forall f \in C_2(\mathbb{T}),\quad f \overset{\|\cdot\|}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-N}^{N} c(n) e^{int} \right|^2 dt \xrightarrow{N\to\infty} 0$$ כלומר

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt$$ (*) מקדמי פורייה

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$ (**)

[illegible]

[illegible] X [illegible]

[illegible] $\{e_1, \dots, e_n\}$ [illegible]

[illegible] $\sum_{i=1}^{N} a_i e_i \quad a_i \in \mathbb{Q}$ [illegible]

[illegible] $\bigcup_{N} \{ \sum_{i=1}^{N} q_i e_i \}$ [illegible]

[illegible] ([illegible])

$X = \{ f : [0,1] \to F \mid f \neq 0$ [illegible] $\}$

$\langle f, g \rangle = \sum_t f(t) \overline{g(t)}$

$\langle f+f', g \rangle = \sum_t (f+f')\bar{g} = \sum_t f\bar{g} + \sum_t f'\bar{g} = \langle f, g \rangle + \langle f', g \rangle$ [illegible]

$\langle \alpha f, g \rangle = \sum_t \alpha f \bar{g} = \alpha \sum_t f \bar{g} = \alpha \langle f, g \rangle$ [illegible]

[illegible] $E = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ [illegible]

[illegible] $|\{t \in [0,1] \mid \exists i \ g_i(t) \neq 0\}| \le \aleph_0$ [illegible]

$\exists \alpha \in [0,1] : \forall i \ g_i(\alpha) = 0$

$\forall i \quad \|1_\alpha - g_i\| = \sum_t |1_\alpha(t) - g_i(t)|^2 \ge |1_\alpha(\alpha) - g_i(\alpha)|^2 = 1$

$B(1_\alpha, \frac{1}{2}) \cap E = \emptyset$

$g_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & t = \frac{1}{k},\ k \in \{1,2,\dots,j\} \\ 0 \end{cases}$ [illegible]

$\|g_n - g_m\| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$

[illegible] $x = \min\{x \mid g(x) \neq 0\}$ [illegible] $m > n = \frac{1}{x}$

$\|g_m - g\| \ge |g_m(\frac{1}{n})| = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{m\to\infty}$

[illegible] $\sum_t \|f(t)\|^2 < \infty$

[illegible] $\times$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $\{x_1, x_2, \dots\}$ [illegible]

[illegible] $x_k \notin \operatorname{span}\{x_i \mid i < k\}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $\{e_1, e_2, \dots\}$ [illegible]

$\left(\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} \right.$ [illegible]

[illegible] $\{x_1, \dots\}$ [illegible] $\{e_n\}$ [illegible]

[illegible] $\{e_n\}$ [illegible]

[illegible] $\times$ [illegible]

[illegible]

דוגמא $C[-1,1]$

$\{1, t, t^2, \ldots\}$ נבצע גרם שמידט על

ונקבל

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$

f_n פולינום ממעלה n

(f_n נק׳ פולינומי לג׳נדר)

ניתן

$$f_n = c_n\left[(1-t^2)^n\right]^{(n)}$$

נגזרת (n)

הערה: יהי H מרחב הילברט ספרבילי
(ספרבילי $\Leftrightarrow$ קיים בסיס א"נ $\{e_n\}$)

$\dim H = \infty$

משפט: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$

הוכחה: נסמן $S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\exists \lim_N S_N$

$\Leftrightarrow$ $\{S_N\}$ סדרת קושי
(H שלם)

מפיתגורס

$$\|S_M - S_N\|^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} c_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |c_n|^2$$

$\{|c_n|^2\}$ סדרת קושי

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$

$\sum_{n=N+1}^{M} |c_n|^2 \xrightarrow{N,M\to\infty} 0$

$\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$

$\boxed{\text{משפט}}$ (סיווג מרחבי הילברט [illegible])

[illegible] H_1, H_2 [illegible] ספרביליים [illegible]

$H_1 \cong H_2$ [illegible]

([illegible] $A: H_1 \to H_2$ [illegible])

הוכחה: [illegible] $H_1 \cong \ell^2$

$$A: H_1 \to \ell^2$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \mapsto (c_n)$$

$$c_n = \langle f, e_n \rangle$$

[illegible] $\sum_n |c_n|^2 < \infty$

חח"ע: $\sum |c_n|^2 = 0 \Rightarrow c_n = 0 \Rightarrow f = 0$

על: $\sum_n |c_n|^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ [illegible]

[illegible]

$$\langle f, g \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n , \sum_{n=1}^{\infty} d_n e_n \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} c_n e_n , \sum_{n=1}^{N} d_n e_n \right\rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n \bar{d_n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{d_n} = \langle (c_n), (d_n) \rangle$$

55

משפט שלמות

H מרחב הילברט, $\{e_n\}$ אורתונורמלית.

אזי:

$\{e_n\}$ שלמה $\iff$ $\forall f \in H$: $f \perp e_n \ \forall n \Rightarrow f = 0$

הוכחה: $(\Rightarrow)$ נניח $\{e_n\}$ שלמה.

יהי $f \in H$ כך ש- $f \perp e_n \ \forall n$ אזי $f = 0$

$\Downarrow$

$$f = \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n = \sum_n 0 \, e_n = 0$$

$(\Leftarrow)$ אם $\{e_n\}$ לא שלמה

נניח ש- $\{e_n\}$ אינה שלמה.

$\Downarrow$

$$H_0 = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}} \subsetneq H$$

קיים $f \in H \setminus H_0$

לפי משפט ההטלה על H_0:

$f = g + h$, $g \in H_0$, $h \in H_0^{\perp}$

$\Downarrow$

$\forall n \quad h \perp e_n$

$h = 0$ (כי $f \notin H_0$) ↯

56

$C_2[-1,1]$

$\{e_n\}$

$\{e_n\}$

$f \perp e_n$ $f \neq 0$

$E = \{f \mid \int_{-1}^{0} f\,dt = \int_{0}^{1} f\,dt\}$

$E^\perp = \{0\}$

$g \in E$

$g|_{[0,1]}$

$g|_{[-1,0]}$

$E^\perp = \{0\}$

E

57

H

$$E = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}} \subsetneq H$$

$$\Downarrow$$

$$E^{\perp} = \{ h \in H \mid h \perp E \}$$

$\{a_{ij}\}$ $a_{ij} \in B(e, \tfrac{1}{j})$

A

$$\Downarrow$$

$E^{\perp}$

$$\Downarrow$$

$\{f_1, f_2, \dots\}$

$$\Downarrow$$

$\{e_n\} \cup \{f_n\}$

$\forall f \in H$ $\quad f = g + h$, $g \in E$, $h \in E^{\perp}$

$g = \sum c_n e_n$

$h = \sum d_k f_k$

$$f = \sum c_n e_n + \sum d_k f_k$$

58

17.5.13

פונקציונלים לינאריים

הגדרה: $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי

פונקציונל לינארי הוא $f: X \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

הגדרה:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|$$

משפט: (i) f רציף ב- $x_0 = 0$

אז $\|f\| < \infty$

(ii) אם $\|f\| < \infty$

אז f רציף ב- X

הוכחה: (i) $\Rightarrow$ (ii) $f(0) = 0$

נניח $\varepsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 : \quad \|x\| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 1$$

$$\|x\| < 1 \Rightarrow \|\delta x\| < \delta \Rightarrow |f(\delta x)| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x)| < \frac{1}{\delta}$$

$$\Downarrow$$

$$\|f\| \le \frac{1}{\delta} < \infty$$

(ii) $\Rightarrow$ $x_0 \in X$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| = \left| f\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \right) \right| \|x - x_0\|$$

$$\le \|f\| \|x - x_0\| \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

[illegible]

$\frac{1}{\|x\|} > 1 \Leftarrow \|x\| < 1$

$x = \frac{x}{\|x\|}$ [illegible]

$$\|f(x)\| \geq \left|\frac{1}{\|x\|} f(x)\right| \geq |f(x)|$$

[illegible] $\|f\| < \infty$

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq C\|x\|$$

[illegible] $C = \|f\|$ [illegible]

[illegible] $X = \mathbb{R}^d$

$$f(x=(x_1, \ldots, x_d)) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k x_k$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\left\langle \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_d\end{pmatrix}\right\rangle\right| = |f(x)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |\alpha_k|^2}\ \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2}}_{\|x\|_2}$$

[illegible]

$$\Downarrow$$

$$\|f\| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |\alpha_k|^2}$$

[illegible] $x_i = \alpha_i$ [illegible]

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{d} |\alpha_k|^2\right)^{1/2}$$ [illegible]

60

ℓ_p^d [illegible]

$$x = (x_1, \dots, x_d)$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

[illegible]

$$f(x) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k x_k \qquad \{\alpha_k\}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|f(x)\| = \sup_{x \,|\, \sum |x_k|^p = 1} \left| \sum_{k=1}^{d} \alpha_k x_k \right| = \left(\sum_{k=1}^{d} |\alpha_k|^q \right)^{1/q}$$

[illegible]

$$\|f\|_{\ell_p^d \to \mathbb{R}} = \|\vec{\alpha}\|_{\ell_q^d}$$

$$\|f\|_{\ell_1^d \to \mathbb{R}} = \|\vec{\alpha}\|_{\ell_\infty^d}$$

$$\|f\| = \sup_{x \,|\, \sum_{k=1}^{d} |x_k| = 1} \left| \sum_{k=1}^{d} \alpha_k x_k \right| \le \|x\|_1 \|\alpha\|_\infty = \|\alpha\|_\infty = \alpha_j$$

$$x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$ [illegible]

j

61

דוגמא

$\ell^{(2)}_\infty$

$f(x) = 5x_1 - 2x_2$

$\Downarrow$

$\|f\|_{\ell^2_\infty \to \mathbb{R}} = 5 + 2 = 7$

$\Downarrow$

$(1,-1)$ ב ...

$\|f\|_{\ell^2_2 \to \mathbb{R}} = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$

$\|f\|_{\ell^2_1 \to \mathbb{R}} = 5 = \|(5,-2)\|_\infty$

משפט

$X = H$ מרחב הילברט, יהי $a \in H$

$f_a(x) = \langle x, a \rangle$

$\Downarrow$

$|f_a(x)| \le \|a\| \, \|x\|$

$\Downarrow$

$\|f_a\| = \|a\|$ כי נציב $x=a$

6) $G^\perp$ [illegible]

[illegible] H [illegible]

[illegible] f [illegible]

[illegible] $a \in H$ [illegible] $f(x) = \langle x, a \rangle$

($\|f\| = \|a\|$ [illegible])

[illegible] f [illegible] $f = 0$ [illegible] $a = 0$

[illegible] $f \neq 0$

[illegible] $G = \{ x \in H \mid f(x) = 0 \} = \ker f$

G [illegible] H [illegible] $G = f^{-1}(\{0\})$

$\dim G^\perp = 1$

$H = G \oplus G^\perp$

$\Downarrow$

$G^\perp \neq 0$

$\Downarrow$

$0 < \dim G^\perp$

[illegible] $0 \neq h_1, h_2 \in G^\perp$

[illegible] $h = f(h_2) h_1 - f(h_1) h_2$

$\Downarrow$

$f(h) = f(h_2) f(h_1) - f(h_1) f(h_2) = 0$

$h \in G$ [illegible] $h \in G^\perp$ [illegible] $G^\perp$ [illegible]

$\Downarrow$

$h = 0$

$\Downarrow$

$\{h_1, h_2\}$ [illegible]

$0 < \dim G^\perp < 2$ [illegible] $\dim G^\perp = 1$