תרגיל 2

28 באוקטובר 2018

1. יהיו $\alpha \neq \beta$ שני סודרים. הוכיחו ש$s(\alpha) \neq s(\beta)$.
הוכחה:

נניח בשלילה ש$s(\alpha) = s(\beta)$. בפרט, $\alpha \in s(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$. אם $\alpha \in \{\beta\}$ זאת סתירה. לכן, $\alpha \in \beta$. באותו אופן אפשר להוכיח ש$\beta \in \alpha$. וקיבלנו סתירה.

2.

(א) יהי α סודר טבעי. הוכיחו שלכל $\beta < \alpha$, β סודר טבעי.
הוכחה:

$\beta < \alpha$ ולכן β הוא או אפס או עוקב. כמו כן, לכל $\gamma < \beta$, $\gamma < \alpha$ ולכן γ הוא אפס או עוקב. מש"ל.

(ב) הוכיחו שω סודר.
הוכחה:

ω הוא קבוצה של סודרים. מספיק להוכיח שהיא שייך־ טרנזיטיבית. והכן יהיו $\alpha \in \beta \in \omega$. כלומר, β טבעי ו$\alpha < \beta$. מהסעיף הקודם נקבל שα טבעי. כלומר, $\alpha \in \omega$.

(ג) הוכיחו שω הוא הסודר הגבולי הקטן ביותר. (כלומר, צריך להוכיח שני דברים: שω גבולי, וכן לכל $\alpha < \omega$, α לא גבולי)
הוכחה:

נוכיח שω גבולי. ובכן, אם $n \in \omega$, אז $s(n) = n+1 \in \omega$. ולכן מתנאי שהוכחנו בכיתה נקבל שω גבולי.

כעת, יהי $\alpha < \omega$. כלומר $\alpha \in \omega$. אז α טבעי. בפרט α הוא או 0 או עוקב. גורר שα לא גבולי.

3. יהי α סודר גבולי. הוכיחו: $A \subseteq \alpha$ קופילנית $\iff$ $\bigcup A = \alpha$.
הוכחה:

$\Longleftarrow$ הוכחנו בכיתה.

$\Longrightarrow$ יהי $\beta \in \alpha$. אז $\beta \in \bigcup A$. כלומר, יש $\gamma \in A$ כך ש$\beta \in \gamma$. שקול: יש $\gamma \in A$ כך ש$\beta < \gamma$. גורר: A קופינלית.

4. תהי A קבוצה של סודרים. הוכיחו ש$\sup\{\alpha+1 | \alpha \in A\}$ הינו הסודר הראשון שגדול ממש מכל איברי A.
הוכחה:

נסמן $\beta = \sup_{\alpha\in A}\{\alpha+1\}$. ראשית, נוכיח ש$\beta$ גדול ממש מכל איברי A. ובכן, יהי $\alpha \in A$. אזי $\alpha < \alpha+1 \leq \beta$ (מהגדרת הסופרימום). שנית, יהי $\gamma < \beta$. אנחנו רוצים להוכיח שγ לא גדול ממש מכל איברי A. ובכן, מהגדרת הסופרימום, מכיוון שγ קטן מהסופרימום, יש $\alpha \in A$ כך ש $\gamma < \alpha+1$. לכן מתכונות העוקב $\alpha \leq \gamma$. מש"ל.

5. יהיו $\alpha \neq \beta$ סודרים. הוכיחו או הפריכו: $\bigcup \alpha \neq \bigcup \beta$
הפרכה:

נקח $\alpha = \emptyset, \beta = \{\emptyset\}$.