פיתרון לתרגיל מספר 10

תשובה 1:

נסמן ב- X את תכולת המינרלים בקידוח , $X \sim N(\mu,15^2)$. כמו כן נתון : $n=25$ ו- $\bar{X}=248.3$

רמת בטחון של 90% $\Leftarrow$ $\alpha=0.1$ $\Leftarrow$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.645$ לכן נשתמש בנוסחאת רו"ס ברמת בטחון של

$(1-\alpha)\%$ לתוחלת כאשר השונות ידועה: $\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

נציב את הנתונים ונקבל: $248.3-1.645\cdot\frac{15}{5}\le\mu\le 248.3+1.645\cdot\frac{15}{5}$ $\Leftarrow$

$243.365\le\mu\le 253.235$

תשובה 2:

נסמן ב- X את הגובה , $X \sim N(\mu,0.1^2)$ (מכיוון ש-10 ס"מ הם 0.1 מטרים) $n=16$

נחשב את הממוצע: $\bar{X}=\frac{22.79}{16}=1.4244$. רו"ס ברמת בטחון של $1-\alpha$ לתוחלת כאשר השונות ידועה

הוא: $1.4244-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{0.1}{4}\le\mu\le 1.4244+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{0.1}{4}$. וידוע ש- $1.3724\le\mu\le 1.4765$.

נשווה את החסם העליון ונקבל: $1.4244+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{0.1}{4}=1.4765$ $\Leftarrow$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2.08$

$\Leftarrow$ $1-\frac{\alpha}{2}=0.9812$ $\Leftarrow$ $\alpha=0.0376$. לכן רמת הביטחון היא 96.24%.

תשובה 3:

נשתמש בנוסחא רו"ס ברמת מובהקות של α לתוחלת כאשר השונות ידועה:

במקרה שלנו, רמת ביטחון של 95% $\Leftarrow$ $\alpha=0.05$ $\Leftarrow$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96$. לכן נקבל

$52-1.96\cdot\frac{1.25}{\sqrt{n}}\le\mu\le 52+1.96\cdot\frac{1.25}{\sqrt{n}}$. נרצה שאורך רווח הסמך יהיה 1, ז"א שכל סטייה מהממוצע

שווה ל-0.5. $1.96\cdot\frac{1.25}{\sqrt{n}}=0.5\Rightarrow\sqrt{n}=4.9\Rightarrow n\approx 24$. ז"א שיש צורך במדגם בגודל 24 ילדים.

תשובה 4:

א. נסמן ב- X את זמן השהייה בדקות. נחשב: $\bar{X}=69,\hat{S}^2=633.7778$. ולכן רו"ס של 95% לתוחלת זמן השהייה בשדה הוא:

$$\bar{X}\pm t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}=69\pm t_{9,0.975}\cdot\frac{\sqrt{633.7778}}{\sqrt{10}}=69\pm 2.26\cdot 7.961=[51.0081,86.9919]$$

ב. $L=b-a$. $L=86.9919-51.0081=35.9838$ אורך רווח הסמך. לכן הסטיה המקסימלית תהיה:

$$\frac{L}{2}=\frac{35.9838}{2}=17.99$$

ג. להגדיל את גודל המדגם או להקטין את השונות.

תשובה 5:

נסמן ב- X את גובה העץ במטרים. נתון כי X מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 0.7. על מנת שהממוצע בין הסטיה לתוחלת לא יעלה על 0.6 מטר , רוחב רו"ס של 95% צריך להיות קטן או שווה ל-1.2 מטר:

$$2\cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le 1.2\quad\Rightarrow\quad n\ge\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{0.6}\right)^2=\left(\frac{Z_{0.975}\cdot 0.7}{0.6}\right)^2=5.2288$$

כלומר גודל המדגם צריך להיות לפחות 6.

תשובה 6:

נבדוק אם מתקיים כי תוחלת האומד שווה לאומד:

$$E\left(\hat{\theta}\right)=E\left(2\bar{X}\right)=2E(\bar{X})=2E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)=\frac{2}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{2}{n}\left[E(x_1)+\ldots+E(x_n)\right]=$$

$$\frac{2}{n}\cdot n\cdot E(x_i)=2\cdot\int_0^{\theta}x\frac{1}{\theta}dx=2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$$

לכן האומד הינו חסר הטיה.

תשובה 7:

שימו לב, מאחר ומדובר בזוגות של תצפיות על אותם סטודנטים, לנינו מדגם מזווג. נחשב את ערכי ההפרשים:

$D: x_b-x_a: -33,-28,-22,-32,-29,-40$. ממוצעם $\bar{D}=-30\frac{2}{3}$. האומד לשונות הוא .

$\hat{s}_d{}^2=\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}=35.86$ לכן עבור $t_{5,0.95}=2.445$ נקבל:

$$30\frac{2}{3}-\frac{5.989}{\sqrt{6}}*t_{5,0.95}<\mu_d<30\frac{2}{3}+\frac{5.989}{\sqrt{6}}*t_{5,0.95}$$

ונקבל $25.72<\mu_d<35.6$.

<u>תשובה 8:</u>

נחשב אומדים לשונות עבור מעשנים ולא מעשנים : $\hat{S}_2{}^2=95.9$ $\hat{S}_1{}^2=161.4$ למרות שאיננו יודעים מהן השונויות של 2 האוכלוסיות , נתון לנו שהן שוות לכן נאמוד את השונות המשותפת ע"י

$$S_p{}^2=\frac{(n_1-1)\hat{S}_1{}^2+(n_2-1)\hat{S}_2{}^2}{n_2+n_1-2}=121.4$$

סה"כ יש $n_2+n_1=20$ דגימות לכן מספר דרגות החופש הוא $n_2+n_1-2=18$ בהתאם לכך ומאחר ואנו נדרשים לרמת מובהקות(ביטחון) של 95% $t_{18,0.975}=2.1$. גבולות רו"ס הם

$$\overline{x_1}-\overline{x_2}\pm\sqrt{\frac{\hat{S}_p{}^2}{n_1}}+\sqrt{\frac{\hat{S}_p{}^2}{n_2}}\cdot t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}}$$ מכאן $8.9<\mu_2-\mu_1<30.1$

<u>תשובה 9:</u>

$\overline{X}=\frac{\sum X_i}{10}=170.6$. האומד $\sum(X_i-\overline{X})^2$ לשונות האוכלוסיה מתפלג חי-בריבוע .

$\sum(X_i-\overline{X})^2=398.4$. עפ"י הדרישה לרמת המובהקות של 95% , ומאחר ומספר דרגות החופש הוא 10-1=9 ניקח $\chi_{9,0.025}=2.7$ ו- $\chi_{9,0.975}=19$ מכאן

$$\frac{398.4}{19}<\sigma^2<\frac{398.4}{2.7}$$ דהיינו $20.968<\sigma^2<147.556$.

<u>תשובה 10:</u>

נתון ששתי האוכלוסיות הנדגמות הן ב"ת לכן האומד לשונות של הפרש התוחלות הוא

$S=\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{225}{25}+\frac{100}{16}}$ לכן גבולות רו"ס להפרש התוחלות הוא

$(60-50)\pm\sqrt{\frac{225}{25}+\frac{100}{16}}*1.645$ מכאן מקבלים.

תשובה 11:

נסמן ב— X_k^B את רוחב הספר ה— k וב— X_k^J את רוחב כתב האת ה— k. אזי אורכי סדרת הספרים X_B וסדרת כתבי את X_J הם

$$X_B = \sum_{k=1}^{N_B} X_k^B$$

ו—

$$X_J = \sum_{k=1}^{N_J} X_k^J$$

בהתאמה.

כיוון ש— N_B ו— N_J הם מספרים גדולים, על פי משפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$X_B \sim N(N_B\mu_B, N_B\sigma_B^2), \quad X_J \sim N(N_J\mu_J, N_J\sigma_J^2).$$

נגדיר את ההפרש $\Delta = X_B - X_J$. ההסתברות הדרושה היא $P(\Delta > 0)$. מתקיים:

$$\Delta \sim N(N_B\mu_B - N_J\mu_J, N_B\sigma_B^2 + N_J\sigma_J^2).$$

חישוב פשוט מביא:

$$P(\Delta > 0) = 1 - P(\Delta < 0) = 1 - \Phi\left(\frac{N_J\mu_J - N_B\mu_B}{\sqrt{N_B\sigma_B^2 + N_J\sigma_J^2}}\right)$$

כך ש—

$$P(\Delta > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{7.45}}\right) \approx 1 - \Phi(1.83) = 0.034.$$

תשובה 12:

נתחיל מהנוסחאות

$$\overline{Y}_{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y_j, \quad \overline{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

ו—

$$\hat{S}^2_{(Y,k)} = \frac{1}{k-1}\left[\sum_{j=1}^{k} Y_j^2 - k\overline{Y}_{(k)}^2\right], \quad \hat{S}^2_{(X,n)} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - n\overline{X}_{(n)}^2\right].$$

על פי הגדרה, הממוצע של המדגם המאוחד $Z = \{X_1, X_2, ..., X_n, Y_1, Y_2, ..., Y_k\}$ הוא

$$\overline{Z}_{(n+k)} = \frac{1}{n+k}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{k} Y_j\right) = \frac{1}{n+k}\left(n\overline{X}_{(n)} + k\overline{Y}_{(k)}\right).$$

על פי הגדרה, אומדן לשונות של המדגם המאוחד הוא

$$\hat{S}^2_{(Z,n+k)} = \frac{1}{n+k-1}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{k} Y_j^2 - (n+k)\overline{Z}^2_{(n+k)}\right].$$

כיוון ש—

$$\sum_{j=1}^{n} X_j^2 = (n-1)\hat{S}^2_{(X,n)} + n\overline{X}^2_{(n)}$$

ו—

$$\sum_{j=1}^{k} Y_j^2 = (k-1)\hat{S}^2_{(Y,k)} + k\overline{Y}^2_{(k)},$$

אנחנו מקבלים:

$$\hat{S}^2_{(Z,n+k)} = \frac{1}{n+k-1}\left[(n-1)\hat{S}^2_{(X,n)} + (k-1)\hat{S}^2_{(Y,k)} + n\overline{X}^2_{(n)} + k\overline{Y}^2_{(k)} - (n+k)\overline{Z}^2_{(n+k)}\right].$$

נשאר לפשט את החלק שמתייחס לממוצעים:

$$\begin{aligned}
&n\overline{X}^2_{(n)} + k\overline{Y}^2_{(k)} - (n+k)\overline{Z}^2_{(n+k)} \\
&\quad= n\overline{X}^2_{(n)} + k\overline{Y}^2_{(k)} - (n+k)\frac{1}{(n+k)^2}\left(n\overline{X}_{(n)} + k\overline{Y}_{(k)}\right)^2 \\
&\quad= \frac{1}{n+k}\left[n(n+k)\overline{X}^2_{(n)} + k(n+k)\overline{Y}^2_{(k)} - \left(n\overline{X}_{(n)} + k\overline{Y}_{(k)}\right)^2\right] \\
&\quad= \frac{nk}{n+k}\left(\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(k)}\right)^2.
\end{aligned}$$