פתרון תרגיל 2 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה $z=0$ ומצאו אותו אם הוא קיים:

(א) $\frac{\overline{z}}{z}-\frac{z}{\overline{z}}$

$$\frac{\overline{z}}{z}-\frac{z}{\overline{z}}=\frac{\overline{z}^2-z^2}{z\overline{z}}=\frac{x^2-2ixy-y^2-(x^2+2ixy-y^2)}{x^2+y^2}=-i\frac{4xy}{x^2+y^2}$$

לפי כלים של אינפי 3, זה לא מתכנס (למשל מתקדמים לאורך $y=0$ ולאורך $x=y$)

(ב) $\frac{z\operatorname{Re}(z)}{\overline{z}}$

$$\frac{z\operatorname{Re}(z)}{\overline{z}}=\frac{z^2\operatorname{Re}(z)}{z\overline{z}}=\frac{(x^2+2ixy-y^2)x}{x^2+y^2}=\frac{x^3}{x^2+y^2}-\frac{y^2x}{x^2+y^2}+2i\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

נעבור חלק חלק ונראה שכולם מתכנסים (ל 0 כמובן) באמצעות שיטות של אינפי 3

$$|\frac{x^3}{x^2+y^2}|\leq|\frac{x^3}{x^2}|=|x|\to 0$$

$$|\frac{y^2x}{x^2+y^2}|\leq|\frac{y^2x}{2xy}|=|\frac{y}{2}|\to 0$$

ובדומה החלק השלישי ולכן הפונקציה מתכנסת ל 0.

(ג) $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\overline{z}}$

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\overline{z}}=\frac{y}{x-iy}=\frac{xy+iy^2}{x^2+y^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}+i\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

החלק הממשי והמדומה מתבדרים ולכן הגבול לא קיים.

.2

א. $u=x^3, v=y^3$. משוואת קושי רימן הראשונה היא אם $3x^2=3y^2$, והשנייה היא $0=0$ שמתקיימת תמיד. בסה"כ תנאי קושי רימן מתקיים בקבוצה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2=y^2\right\}$

ב. כאן $u=2x,v=y$. משוואת קושי רימן הראשונה היא $2=1$ שאינה מתקיימת כלל. לכן אין שום נקודה בה תנאי קושי רימן מתקיים.

ג. $u=x^3+y^5,v=0$ משוואות קושי רימן הן $3x^2=0$ ו- $5y^4=0$, ולכן קושי רימן מתקיים אך ורק בנקודה $(0,0)$.

3. תהי $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ לפי

$$f(z)=u(x+y)-iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x).
פתרון: נסמן $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ כלומר

$$U(x,y)=u(x+y),\quad V(x,y)=-u(x-y)$$

היות ש u גזירה ברציפות, נקבל שהנגזרות U_x,U_y,V_x,V_y קיימות ורציפות ולכן U,V דיפרנציאביליות בכל נקודה ובפרט על הציר הממשי. נותר לבדוק את קיום משוואות קושי רימן

$$U_x(x,y)=u'(x+y),\quad U_y(x,y)=u'(x+y)$$

$$V_x(x,y)=-u'(x-y)\quad V_y(x,y)=u'(x-y)$$

לכן

$$U_x(x,0)=u'(x)=V_y(x,0),\quad U_y(x,0)=u'(x)=-V_x(x,0)$$

כנדרש ולכן f גזירה על ציר x.

4. מצאו פונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$.
פתרון: אם משוואות קושי רימן ייצאו לנו

$$x^2+y^2=2\quad x^2=y^2$$

אז קל לראות שהנקודות שבהן הפונקציה גזירה הן רק הנקודות הרצויות. צריך למצוא פונקציה שאלו משוואות קושי רימן שלה.
נכתוב את המשוואות בתור

$$x^2=2-y^2\quad x^2=y^2$$

נחליט ש $u_x=x^2$ ולכן $u=\frac{1}{3}x^3+C(y)$ כאשר $C(y)$ היא פונקציה שתלויה רק ב y. כמו כן נחליט ש $u_y=y^2$ ולכן $u=\frac{1}{3}y^3+C(x)$ כלומר בינתיים נראה שאפשר לקחת

$$u(x,y)=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2$$

בהתאמה נקבל לפי משוואות קושי רימן

$$v_y=2-y^2\quad v_x=-x^2$$

ולכן

$$v(x,y)=2y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}x^3$$

כלומר הפונקציה

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2+i(2y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}x^3)$$

מתאימה לדרישות.

5. תהי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2-v^2=c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.
פתרון: אם נסמן

$$g(z)=(f(z))^2=u^2-v^2+2iuv$$

היות ש $\mathrm{Re}(g)$ היא פונקציה קבועה, ו $g(z)$ גזירה, נקבל ש $g(z)$ קבועה. כלומר $(f(z))^2=D$ קבוע. אם במקרה $D=0$ סיימנו. אם לא, נסמן את שני השורשים של D בתור d_1,d_2, זה מחייב שלכל ערך z

$$f(z)\in\{d_1,d_2\}$$

נותר להוכיח ש f שווה רק לאד משני הערכים האלה. נזכור ש $f(z)$ גזירה ולכן בוודאי רציפה. נניח בשלילה שקיימים z_1,z_2 כך ש $f(z_i)=d_i$. נבחר מסילה $\gamma(t)$ כלשהיא בין z_1 ל z_2. לפי משפט ערך הביניים תמונתה תחת f היא מסילה בין d_1,d_2 אבל מצד שני $f(\gamma(t))\subseteq\{d_1,d_2\}$ בסתירה. ולכן לכל z מתקיים $f(z)=d_1$ או $f(z)=d_2$ כלומר f קבועה כנדרש.

6. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z\mid |z|<R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\overline{z})}$ גזירה שם.
פתרון: ראשית נשים לב ש $\overline{f(\overline{z})}$ מוגדרת בתחום המדובר כי $z\in\{z\mid |z|<R\}\Leftrightarrow\overline{z}\in\{z\mid |z|<R\}$. אם נכתוב

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$\overline{f(\overline{z})}=U(x,y)+iV(x,y)$$

אז בעצם

$$U(x,y)=u(x,-y)\quad V(x,y)=-v(x,-y)$$

ולכן U,V בוודאי דיפרנציאביליות כנדרש ובנוסף

$$U_x(x,y)=u_x(x,-y)=v_y(x,-y)=V_y(x,y)$$

$$U_y(x,y)=-u_y(x,-y)=v_x(x,-y)=-V_x(x,y)$$

כלומר משוואות קושי רימן מתקיימות כנדרש.