

## פונקציות מרוכבות

### תרגיל בית מספר 3.

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(z) = \log(z^2 + 1)$  כאשר  $\log$  מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם.
2. חשבו:  $(1+i)^i, (-i)^{-i}, \operatorname{Re}((1-i)^{1+i})$ .
3. א. הוכיחו את השוויונות:  $\cos\left(\frac{1}{i} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})\right) = z, \cot\left(\frac{1}{2i} \ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right) = z$ .  
ב. פתרו את המשוואה  $\sin z = 2$ .
4. א. הוכיחו כי אם  $\log_{R_2}, \log_{R_1}$  הם שני ענפים של הלוגריתם המתאימים לתחומים היסודיים  $R_2, R_1$  ואם  $z$  הוא מספר מרוכב הנמצא בתחום ההגדרה של שני הענפים האלו אז קיים  $k$  שלם כך ש-  $\log_{R_1}(z) = \log_{R_2}(z) + 2\pi ik$ .  
ב. הוכיחו כי אם  $z_1, z_2$  הם שני מספרים מרוכבים המקיימים  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z_1), \operatorname{Arg}(z_2) < \frac{\pi}{2}$  אז  $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$  כאשר  $\log$  מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם.
5. נניח כי  $\log$  הוא הענף העיקרי של הלוגריתם ו- $\log_R$  הוא הענף המתאים לארגומנט  $0 < \operatorname{Arg}(z) < 2\pi$ . (כלומר  $R$  מסמן את התחום  $0 < \operatorname{Im}(z) < 2\pi$ ).  
א. הוכיחו כי  $\log(1/z) = -\log(z)$  לכל  $z$  בתחום ההגדרה של  $\log$ .  
ב. תנו דוגמא למספר מרוכב  $z$  המקיים  $\log_R(1/z) \neq -\log_R(z)$ .