**הגדרה**מטריצה , כש - מטריצות ריבועיות, נקראת **מטריצה אלכסונית בלוקים**.

**משפט**תהי מטריצה אלכסונית בלוקים. יהיו פולינומים אופייניים של ו - פולינומים מינימליים שלהן.

אזי לפולינום האופייני ולפולינום המינימלי של מתקיימים השוויונים הבאים:

1. .
2. .

**הוכחה**

, לפי ההגדרה מקיים את התכונות הבאות:

* לכל .
* אם פולינום אחר כך ש - לכל אזי: .
* פולינום מתוקן.

נרצה להוכיח כי ש - .

נוכיח שמתקיים: וגם .

1. אם פולינום כשלהו, אזי מאפס למטריצה או"א מאפס לכל אחת מהמטריצות .

**הוכחה**:

(דורש הוכחה, אך נובע מהעובדה שחישוב הפולינום מהווה שילוב של פעולות כפל מטריצות, כפל מטריצה בסקלר וחיבור מטריצות, וכל אחת מהפעולות הנ"ל הולכת בלוק בלוק).

לכן: לכל .

1. לכל .

**הוכחה**:  *ז"א , ולכן:*

*.*

1. *.*

***הוכחה****: נובע מסעיפים 1 ו – 2.*

1. *.*

**הוכחה**: נובע מסעיף 3 ומהמשפט שאומר שכל פולינום מאפס מתחלק בפולינום המינימלי.

1. .

**הוכחה**: נובע מסעיף 1 ומההגדרה של הפולינום המינימלי.

1. לכל .

**הוכחה**: נובע מסעיף 5 ומהמשפט שאומר שכל פולינום מאפס מתחלק בפולינום המינימלי.

1. .

**הוכחה**: עפ"י סעיף 6, הינו כפולה משותפת של . לפי ההגדרה של , מתקיים: .

1. .

**הוכחה**: נובע מסעיפים 4 ו - 7.

בסה"כ: .

**עובדות נוספות על פירוק פולינומים**

**חוג פולינומים**יהי שדה ויהי חוג פולינומים (נתבונן בשתי פעולות חיבור, , וכפל, ) במשתנה אחד.

**הערה**האיברים ההפיכים ב - הינם פולינומים קבועים (שונים מאפס) (כלומר, חוג דומה לשדה, פרט לתכונה לפיה לכל איבר שונה מאפס קיים איבר הופכי).

**הוכחה**
אם הפיך, אזי קיים פולינום כך ש - .

**הערה**ב - אין מחלקי אפס (כלומר, אם , אזי ).

**הגדרה**יהי פולינום לא הפיך.

אומרים ש – **פריק** אם קיימים , שניהם לא הפיכים, כך ש - . אחרת, אומרים

ש – **פולינום אי פריק.**

**עובדה**כל פולינום מתפרק למכפלה של פולינומים אי פריקים, והצגה זו יחידה, במובן הבא: לכל פולינום קיימת הצגה בצורה , כך ש – פולינום הפיך (פולינום קבוע עפ"י ההערה לעיל) ו - , ואם הצגה נוספת ( הפיך ו – אי פריקים), אזי: ומתקיים (עד כדי שינוי סדר של גורמים).

**הערה**קיימים חוגים שתכונה זו ("המשפט היסודי של האריתמטיקה"=פירוק יחיד לאי פריקים) אינו מתקיים.

נתבונן בחוג . ניתן להוכיח שב – אין פירוק יחיד לאי פריקים. דוגמה: .