משפט סילו 2:

תחת התנאים של משפט סילו 1 $(|G| = p^n m$, $(p,m) = 1)$:

א) כל ת"ח $H \le G$ מסדר p^k כאשר $1 \le k \le n$ מוכלת באיזשהי ת"ח p-סילו.

ב) כל שני ת"ח p-סילו הם צמודות.

הוכחה

תהא $H \le G$ עם $|H| = p^k$.

קבוצת ת"ח p- סילו= Syl_p

ע"פ משפט סילו 1:

$$Syl_p \neq \phi$$

תהא $P \in Syl_p$ ונגדיר פעולה $H \times G/_p \to G/_p$ ע"י $(h, xP) \mapsto hxP$

פעולת H מחלקת את איברי $G/_P$ למסלולים זרים. נזכר כי H היא חבורת p, ולכן:

$$m = |G/_P| = \sum_{x\ rep} |H * xp| = \sum_{x\ rep} [H: Stb(xp)] = \sum_{x\ rep} p^{r_x}$$

<u>אבל</u> $(m,p) = 1$ ולכן בהכרח לפחות $r_x = 0$ עבור x אחד, כלומר קיימת לפחות נקודת שבת אחת, כלומר קיים xP כל שלכל $h \in H$

$$hxP = xP \Leftrightarrow x^{-1}hxP = x^{-1}xP = P \Leftrightarrow x^{-1}hx \in P \Leftrightarrow h \in xPx^{-1} \Rightarrow H \subseteq xPx^{-1}$$

$$|xPx^{-1}| = |P| = p^n$$

ב)

ע"פ סעיף קודם בפרט עבור $P_1 \in SyL_p(G)$ (מסדר p^n) קיימת $P_2 \in SyL_p(G)$ כך ש: $P_1 \subseteq xP_2x^{-1}$ עבור x כלשהו.

אבל $|P_1| = p^n = |P_2| = |xP_2x^{-1}|$ ולכן $P_1 = xP_2x^{-1}$.

ההצמדה לא משנה את גודל הקבוצה!.

לכל $|H| = p^k$ יכולנו להתחיל עם $P \in SyL_p(G)$

$H \times G/_P$ אתה יכול להתחיל עם כל P שאתה רוצה ותקבל

$$H \subseteq xPx^{-1}$$

תוצאה

$$Syl_p(G) = \{P\} \Leftrightarrow P \lhd G$$

הוכחה

$$Syl_p(G) = \{P\} \Leftrightarrow \forall x \in G: xPx^{-1} = P \Leftrightarrow \forall x \in G: xP = Px$$