פִּתְרוֹן תַּרְגִּיל בַּיִת מִסְפָּר 10

שאלה לא מהחוברת

יהיו U,V,W תתי מרחבים של מרחב ווקטורי כלשהו.

א. האם בהכרח מתקיים השוויון: $U\bigcap(V+W)=(U\bigcap V)+(U\bigcap W)$

פתרון:

נפריך ע"י דוגמא נגדית: $U=span\{(1,1)\},V=span\{(1,0)\},W=span\{(0,1)\}$.

$V+W=span\{(1,0),(0,1)\}=\mathbb{R}^2$ ולכן $U\cap(V+W)=U$ אבל

$U\cap V=U\cap W=\{(0,0)\}$ ולכן

$(U\cap V)+(U\cap W)=\{(0,0)\}\neq U=U\cap(V+W)$.

ב. הוכיחו שהשוויון הקודם תקף במצב בו $V\subseteq U$

פתרון:

$(U\cap V)\subseteq U\cap(V+W)$ וכן $(U\cap W)\subseteq U\cap(V+W)$ ומכאן תמיד $(U\cap V)+(U\cap W)\subseteq U\cap(V+W)$ (בלי קשר לנתון הנוסף $V\subseteq U$). כעת נניח שנתון ש $V\subseteq U$ ונוכיח שגם $(U\cap V)+(U\cap W)\supseteq U\cap(V+W)$. מ"ל שאם $V\subseteq U$ אז $V+(U\cap W)\supseteq U\cap(V+W)$ (שכן $U\cap V=V$ במקרה זה). יהי $t\in U\cap(V+W)$ אזי קיימים $w_1\in W, v_1\in V, u_1\in U$ כך ש $t=u_1=v_1+w_1$. נרצה להראות ש $t\in V+(U\cap W)$. $t=v_1+w_1$ וכן $v_1\in V$ נראה ש $w_1\in U\cap W$ ונקבל הדרוש. כבר ידוע ש $w_1\in W$ לכן מ"ל ש $w_1\in U$ אבל $w_1=u_1-v_1$ וכן $u_1\in U, v_1\in V\subseteq U$ ולכן $w_1=u_1-v_1\in U$ (כי U ת"מ). מש"ל

ג. הוכיחו שמתקיים:

$$(U+W)\bigcap(W+V)\bigcap(V+U)=\left[(W+V)\bigcap U\right]+\left[(V+U)\bigcap W\right]$$

פתרון:

נוכיח הכלה דו כיוונית.

$\supseteq$: $U\subseteq(U+W),(V+U)$ ולכן $U\subseteq(U+W)\cap(V+U)$. כמו כן $W+V\subseteq W+V$

מכאן

$(W+V)\cap U\subseteq(U+W)\cap(V+U)\cap(W+V)=(U+W)\cap(W+V)\cap(V+U)$

באופן דומה מסיקים ש $(V+U)\cap W\subseteq(U+W)\cap(W+V)\cap(V+U)$. מכיון שסכום של שני תתי מרחבים הוא תת המרחב הקטן ביותר המכיל את שניהם נקבל $\left[(W+V)\cap U\right]+\left[(V+U)\cap W\right]\subseteq(U+W)\cap(W+V)\cap(V+U)$. לכן אגף ימין מוכל באגף שמאל.

$\subseteq$: יהי $t\in(U+W)\cap(W+V)\cap(V+U)$. אזי קיימים $u_1,u_2\in U,\ w_1,w_2\in W, v_1,v_2\in V$ כך ש $t=u_1+w_1=w_2+v_1=v_2+u_2$. נרצה להראות ש

$t\in\left[(W+V)\cap U\right]+\left[(V+U)\cap W\right]$. על מנת לעשות זאת צריך להראות שאפשר להציג את t כסכום של שני וקטורים האחד מ $\left[(W+V)\cap U\right]$ והשני מ $\left[(V+U)\cap W\right]$. מ"ל ש $w_1\in\left[(V+U)\cap W\right],\quad u_1\in\left[(W+V)\cap U\right]$ (כי $t=u_1+w_1$).

ברור ש $u_1\in U$ מהמשוואות לעיל מקבלים ש $u_1=(w_2-w_1)+v_1\in W+V$ (נעזרים כאן בכך ש W ת"מ ולכן $w_2-w_1\in W$). כעת, מהשויון $w_1=v_2+(u_2-u_1)$ נסיק ש $w_1\in\left[(V+U)\cap W\right]$ ונקבל הדרוש.

ד. הוכיחו שמתקיים:

$$\dim\left[(U+V)\bigcap W\right]+\dim\left(U\bigcap V\right)=\dim\left[(V+W)\bigcap U\right]+\dim\left(V\bigcap W\right)$$

<u>פתרון:</u>

מפעילים את משפט המימדים פעמיים ומקבלים:

$$(*)\begin{cases}\dim\left((U+V)+W\right)=\dim(U+V)+\dim(W)-\dim\left[(U+V)\cap W\right]=\\ =\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)+\dim(W)-\dim\left[(U+V)\cap W\right]=\\ =\dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)-\dim\left[(U+V)\cap W\right]\end{cases}$$

מכאן ניתן להסיק שגם

$$(**)\begin{cases}\dim\left((V+W)+U\right)=\dim(V)+\dim(W)+\dim(U)-\dim(V\cap W)-\dim\left[(V+W)\cap U\right]=\\ =\dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(V\cap W)-\dim\left[(V+W)\cap U\right]\end{cases}$$

אבל, $(U+V)+W=(V+W)+U$ ולכן גם המימדים שוים לכן ניתן להשוות בין (*) ל (**) . קל לראות לאחר העברת אגפים שנקבל בדיוק

$\dim(U\cap V)+\dim\left[(U+V)\cap W\right]=\dim(V\cap W)+\dim\left[(V+W)\cap U\right]$.

ה. הוכיחו:

$$\left(U\bigcap V\right)+\left(V\bigcap W\right)+\left(W\bigcap U\right)\subseteq\left(U+V\right)\bigcap\left(V+W\right)\bigcap\left(W+U\right)$$

<u>פתרון:</u>

נראה רק $U\cap V\subseteq(U+V)\cap(V+W)\cap(W+U)$. בצורה דומה לחלוטין ניתן להראות שגם $(V\cap W),(W\cap U)\subseteq(U+V)\cap(V+W)\cap(W+U)$ ואז מכיון שהסכום הוא תת המרחב הקטן ביותר כך ש... נסיק ש
$(U\cap V)+(V\cap W)+(W\cap U)\subseteq(U+V)\cap(V+W)\cap(V+W)\cap(W+U)$.

ניגש להוכחת $U\cap V\subseteq(U+V)\cap(V+W)\cap(W+U)$. מתקיים
$U\cap V\subseteq U\subseteq(U+V),(W+U)$ ומכאן $U\cap V\subseteq(U+V)\cap(W+U)$. מצד שני
$U\cap V\subseteq V\subseteq V+W$ לכן בסה"כ
$U\cap V\subseteq(U+V)\cap(W+U)\cap(V+W)=(U+V)\cap(V+W)\cap(W+U)$.

ו. **סעיף רשות:** הוכיחו שההפרש של המימדים של המרחבים בסעיף הקודם, הוא בהכרח מספר זוגי.
<u>פתרון:</u> - בסוף הקובץ.

<u>שאלה 8.2 וחצי</u>

א. הפרכה- נניח $A=\{e_i:8\geq i\geq 1\},B=\{e_i:9\geq i\geq 1\},W=Span(A),V=Span(B)$ אז מתקיים $\dim(W)=8,\dim(V)=9,\dim(V\cap W)=\dim(W)=8\neq 7$.

ב.הפרכה- נניח $A=\{e_i:4\geq i\geq 1\},B=\{e_i:7\geq i\geq 5\},W=Span(A),V=Span(B)$ אז מתקיים $V\not\subset W,\dim(W)=4,\dim(V)=3,\dim(V\cap W)=\dim(\{0\})=0\neq 2$.

ג.הפרכה- (למרות שהגרירה של צד ימין את צד שמאל נכונה תמיד). ניקח
$V=\mathbb{R}^3,U=Span\{e_1\},W=Span\{e_1,e_2\}$

מתקיים $\dim V=3,\dim W=2,\dim U=1\Rightarrow\dim V=\dim W+\dim U$ אך ברור ש-
$V\neq U\oplus W$.

ד. הוכחה- יהיו $V_1,V_2\subseteq V$ ת"מ המקיימים $\dim V_1=5,\dim V_2=4,\dim V=7$ מכיון ש-
$(*)\quad V_1\cap V_2\subseteq V_2\Rightarrow\dim V_2\geq\dim(V_1\cap V_2)\Rightarrow 4\geq\dim(V_1\cap V_2)$.

מצד שני
$$7=\dim(V)\geq\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)=$$
$$=9-\dim(V_1\cap V_2)\Rightarrow\dim(V_1\cap V_2)\geq 2\quad(**)$$

מ $(*)$ ו-$(**)$ נקבל הדרוש.

<u>שאלה 8.4</u>

נתון כי $U_1+U_2=U_1+U_3$. נפעיל את משפט המימדים על שני האגפים:

$$\begin{aligned}&\dim(U_1+U_2)=\dim(U_1)+\dim(U_2)-\dim(U_1\cap U_2)=\\&\dim(U_1)+\dim(U_3)-\dim(U_1\cap U_3)=\dim(U_1+U_3)\\&\dim(U_1\cap U_3)-\dim(U_1\cap U_2)=\dim(U_3)-\dim(U_2)\\&\dim(U_2)<\dim(U_3)\Rightarrow \underline{\dim(U_1\cap U_2)<\dim(U_1\cap U_3)}\end{aligned}$$

<u>שאלה 11.2</u>

נוכיח שהתכונות הבאות שקולות: (נניח $b\in F^m$, $A\in F^{m\times n}$)

א. למערכת $Ax=b$ יש פתרון
ב. למטריצות A ו- $\left(A|b\right)$ יש אותה דרגת עמודות
ג. b שייך למרחב העמודות של A

א ← ג:

אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון אזי קיים ווקטור $x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$ כך ש- $A\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=b$. לפי תרגיל 3.6 נוכל לרשום $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C_i\left(A\right)=b$ ורואים ש-b שייך למרחב העמודות של A.

ג ← ב:

נניח $rank\left(A\right)=k$ עבור $0\le k\le \min\left\{n,m\right\}$. אזי יש ב-$A$ בדיוק k עמודות בת"ל. היות ו-b נמצא במרחב העמודות של A, הוא תלוי ליניארית בעמודות A ולכן לא מוסיף לדרגה. לכן $rank\left(A|b\right)=k$.

ב ← א:

למטריצות A ו- $\left(A|b\right)$ יש אותה דרגת עמודות ולכן b תלוי ליניארית בעמודות A. לכן קיימים סקלרים $\alpha_1,...,\alpha_n$ כך ש- $b=\alpha_1C_1\left(A\right)+...+\alpha_nC_n\left(A\right)$. לכן, על פי תרגיל 3.6 מתקיים $A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=b$, מה שאומר שהווקטור $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ הוא פתרון המערכת.

<u>שאלה 11.6 ד</u>

יש להוכיח שאם $m<n$ ו- $A,B\in F^{m\times n}$, אז $A^tB\in F^{n\times n}$ אינה הפיכה.

אמנם $rank\left(A^tB\right)\le rank\left(B\right)\le m<n$ לכן $rank\left(A^tB\right)\ne n$ ומכאן (עפ"י סעיף ב של 11.6) A^tB אינה הפיכה.

<u>שאלה 11.7</u>

א) יש להוכיח שאם $A\in F^{n\times n}$ הפיכה ו $B\in F^{n\times k}$ אזי $rank(AB)=rank(B)$.

הוכחה: עפ"י משפט מתקיים תמיד $rank(AB)\le rank(B)$ לכן מ"ל $rank(AB)\ge rank(B)$.

כעת, A הפיכה ולכן קיימת A^{-1} ומתקיים $B=A^{-1}(AB)$ בשימוש אותו משפט $(rank\left(CD\right)\le\min\left\{rank\left(C\right),rank\left(D\right)\right\})$ הפעם למטריצות $C=A^{-1},\ D=AB,\ CD=B$ נקבל $rank(AB)\ge rank(B)$.

ב) ניסוח טענה דומה- " אם $A\in F^{n\times n}$ הפיכה ו $B\in F^{m\times n}$ אזי $rank(BA)=rank(B)$."

הוכחה דומה לסעיף א' הפעם יש לשים לב כי $B=\left(BA\right)A^{-1}$.

<u>שאלה 11.10</u>

א) לכל $1\le i\le m$ מתקיים $R_i(A+B)=R_i(A)+R_i(B)\in R(A)+R(B)$ ומכיון ש $R(A+B)=span\left\{R_i(A+B):1\le i\le m\right\}$ (וכן $R(A)+R(B)$ ת"מ) נקבל $R(A+B)\subseteq R(A)+R(B)$. לכן

$$rank(A+B)=\dim R(A+B)\le\dim\left(R(A)+R(B)\right)=$$
$$=rank(A)+rank(B)-\dim\left(R\left(A\right)\bigcap R\left(B\right)\right)\le rank\left(A\right)+rank\left(B\right)$$

ב) יהי $0 \neq \alpha \in F$. עפ"י סעיף א' $rank(A'+B') \leq rank(A')+rank(B')$ עבור $A'=A+\alpha B, B'=-\alpha B$ ולכן $(*)$ $rank(A) \leq rank(A+\alpha B)+rank(-\alpha B)$.

אם נציב $A''=A+\alpha B, B''=-A$ (עפ"י סעיף א') נקבל $(**)$ $rank(\alpha B) \leq rank(A+\alpha B)+rank(-A)$. כעת לכל מטריצה C ולכל סקלר $0 \neq \lambda \in F$ מתקיים $R(C)=R(\lambda C)$ (שכן C ו- λC שקולות שורה) ומכאן $rank(C)=rank(\lambda C)$.

מהצבה ב $(*)$ נקבל

$$rank(A) \leq rank(A+\alpha B)+rank(B) \Rightarrow rank(A)-rank(B) \leq rank(A+\alpha B)$$

ובאופן דומה נקבל מ$(**)$ כי

$rank(B) \leq rank(A+\alpha B)+rank(A) \Rightarrow rank(B)-rank(A) \leq rank(A+\alpha B)$ ובסה"כ

$$|rank(A)-rank(B)| \leq rank(A+\alpha B)$$

<u>שאלה 11.12</u>

תהי $A \in F^{n\times n}$ (כמו בתרגיל 11.11). נוכיח שהתכונות הבאות שקולות:

א. לכל $b \in F^n$ למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.
ב. לכל $b \in F^n$ למערכת $Ax=b$ יש פתרון.

א ← ב:

טריוויאלי. אם יש פתרון יחיד, אז בפרט יש פתרון.

ב ← א:

נניח שלמערכת יש פתרון לכל $b \in F^n$, אזי בפרט יש לה פתרון ל- $b=e_i$ עבור $1 \leq i \leq n$.
נסמן את הפתרונות ב- x_i בהתאמה ונקבל: $Ax_1=e_1, \ldots, Ax_n=e_n$. שימו לב שלפי תרגיל 3.6 מתקיים:

$$A\begin{pmatrix} | & \ldots & | \\ x_1 & \ldots & x_n \\ | & \ldots & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & \ldots & | \\ Ax_1 & \ldots & Ax_n \\ | & \ldots & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & \ldots & | \\ e_1 & \ldots & e_n \\ | & \ldots & | \end{pmatrix}=I$$

, ז"א, המטריצה A הפיכה. לכן, לפי תרגיל 11.11 (אותו הוכחנו בכיתה) נקבל שלכל $b \in F^n$ למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

פתרון שאלה ראשונה – סעיף ו'

נסמן את שני האגפים

$$a.\ (U\cap V)+(V\cap W)+(W\cap U)$$
$$b.\ (U+V)\cap(V+W)\cap(W+U)$$

ונפתח תחילה כל אחד מהם בנפרד.

נתחיל מאגף $(b.)$: לפי סעיף ג' מתקיים:

$$(U+V)\cap(V+W)\cap(W+U)=\left[(V+W)\cap U\right]+\left[(W+U)\cap V\right]$$ נפעיל

כעת את משפט המימדים:

$$\dim\left(\left[(V+W)\cap U\right]+\left[(W+U)\cap V\right]\right)=\dim\left((V+W)\cap U\right)+$$
$$\dim\left((W+U)\cap V\right)-\dim\left[\left((V+W)\cap U\right)\cap\left((W+U)\cap V\right)\right]$$

כעת, שימו לב שבגלל אסוציאטיביות מתקיים:

$$\left((V+W)\cap U\right)\cap\left((W+U)\cap V\right)=V\cap(V+W)\cap U\cap(U+W)$$

ובגלל ש- $V\subseteq(V+W),U\subseteq(U+W)$ נקבל בסה"כ:

$$\left((V+W)\cap U\right)\cap\left((W+U)\cap V\right)=V\cap U$$

כלומר, המימד של $(b.)$ הוא:

$$\dim\left((V+W)\cap U\right)+\dim\left((W+U)\cap V\right)-\dim(U\cap V)$$

לפי סעיף ד' מתקיים:

$$\dim\left[(V+W)\cap U\right]=\dim\left[(U+V)\cap W\right]+\dim(U\cap V)-\dim(V\cap W)$$

נציב זאת אצלנו ונקבל:

$$\dim\left[(U+V)\cap W\right]+\dim(U\cap V)-\dim(V\cap W)+$$
$$+\dim\left((W+U)\cap V\right)-\dim(U\cap V)=$$
$$\dim\left[(U+V)\cap W\right]-\dim(V\cap W)+\dim\left((W+U)\cap V\right)$$

נעבור כעת לפיתוח אגף $(a.)$: נפעיל עליו את משפט המימדים ונקבל:

$$\dim\left[\ (U\cap V)+(V\cap W)+(W\cap U)\right]=\dim(U\cap V)+\dim(V\cap W)+$$
$$+\dim(W\cap U)-\dim(V\cap U\cap W)-\dim\left\{(U\cap V)\cap\left[(V\cap W)+(W\cap U)\right]\right\}$$

נתבונן באיבר האחרון: $(U\cap V)\cap\left[(V\cap W)+(W\cap U)\right]$, ניתן לרשום אותו כ-

$U\cap\left(V\cap\left[(V\cap W)+(W\cap U)\right]\right)$ ואז, מכיוון שמתקיים $V\cap W\subseteq V$ ניתן להפעיל את סעיף א' ולקבל:

$$U\cap\left(V\cap\left[(V\cap W)+(W\cap U)\right]\right)=U\cap\left(V\cap(V\cap W)+V\cap(W\cap U)\right)=$$
$$U\cap(V\cap W+V\cap W\cap U)$$

ואז, מכיוון ש- $V\cap W\cap U\subseteq U$ ניתן שוב להפעיל את סעיף א' ולקבל:

$$U\cap(V\cap W+V\cap W\cap U)=U\cap(V\cap W)+U\cap(V\cap W\cap U)=U\cap V\cap W$$

כלומר, המימד של אגף $(a.)$ שווה כעת ל:

$$\dim(U\cap V)+\dim(V\cap W)+\dim(W\cap U)-$$
$$-\dim(V\cap U\cap W)-\dim(V\cap U\cap W)=$$
$$\dim(U\cap V)+\dim(V\cap W)+\dim(W\cap U)-2\dim(V\cap U\cap W)$$

כעת נחסר בין שני האגפים (וננסה להגיע למספר זוגי כלשהו):

$$\dim(U\cap V)+\dim(V\cap W)+\dim(W\cap U)-2\dim(V\cap U\cap W)-$$
$$\dim\left[(U+V)\cap W\right]+\dim(V\cap W)-\dim((W+U)\cap V)=$$
$$=\dim(U\cap V)+2\dim(V\cap W)+\dim(W\cap U)-2\dim(V\cap U\cap W)-$$
$$-\dim\left[(U+V)\cap W\right]-\dim((W+U)\cap V)$$

שוב, לפי סעיף ד', נציב את $\dim\left[(U+V)\cap W\right]$ ואת $\dim\left[(W+U)\cap V\right]$ ונקבל:

$$2\dim(U\cap V)+2\dim(W\cap U)-2\dim(V\cap U\cap W)-2\dim\left[(V+W)\cap U\right]$$

זהו מספר זוגי, וזה בדיוק מה שהיה צריך להוכיח.