אלגברה ליניארית 2 – תרגיל מס' 8

להגשה ב-כט' באייר (21.5)

1. א. תהיינה $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. הראה כי A_1 ו- A_2 נילפוטנטיות אך $A_1 + A_2$ ו- $A_1 \cdot A_2$ אינן נילפוטנטיות.

ב. תהיינה A_1 ו- A_2 מטריצות ריבועיות מתחלפות $(AB = BA)$. הוכח כי אם A_1 ו- A_2 נילפוטנטיות, אז גם $A_1 + A_2$ ו- $A_1 \cdot A_2$ נילפוטנטיות.

ג. תהי T טרנפורמציה לינארית, ויהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ סקלרים כלשהם ב- F. נגדיר את הטרנספורמציה: $S = \alpha_1 T + \alpha_2 T + \ldots + \alpha_n T^n$. הוכח כי אם T נילפוטנטית מאינדקס r, אז גם S נילפוטנטית, ואינדקס הנילפוטנטיות שלה קטן או שווה ל- r.

2. א. תהי T טרנספורמציה לינארית (או מטריצה) נילפוטנטית מאינדקס k. הוכח כי הפולינום המינימלי של T הוא t^k.

ב. תהי T טרנספורמציה לינארית (או מטריצה) נילפוטנטית. הוכח כי ל-T ערך עצמי יחיד $\lambda = 0$.

ג. הוכח כי טרנספורמציה לינארית T היא נילפוטנטית מאינדקס k אם ורק אם המטריצה שלה $[T]$ היא נילפוטנטית מאינדקס k.

ד. תהיינה A_1 ו- A_2 מטריצות דומות. הוכח כי אם A_1 נילפוטנטית מאינדקס k, אז גם A_2 היא כזאת.

3. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות, חשב את צורת ג'ורדן שלה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. א. מצא את כל צורות הג׳ורדן האפשריות עבור טרנספורמציות לינאריות $T:V\to V$ המקיימות $T^4=0$, $T^3\neq 0$ אם נתון כי $\dim V=6$.

ב. מצא את כל צורות הג׳ורדן האפשריות עבור מטריצות שהפולינום האופייני שלהן הוא $P(t)=t^5$.

5. נתונה מטריצה A מסדר 6, המקיימת את השוויון $A^5=0$ אך $A^4\neq 0$.

מהי הדרגה של A? (מצא את צורת ג׳ורדן של A).

6. תהי M מטריצה ריבועית. הוכח כי $M^2=0$ אם ורק אם קיימות שתי מטריצות ריבועיות A ו-B כך ש- M=AB ו- BA=0 (הדרכה: הוכח זאת תחילה עבור צורת ג׳ורדן של M).

7. תהי:
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

הראה כי A נילפוטנטית, ומצא את צורת ג׳ורדן שלה.

<u>בהצלחה!</u>