פתרון מבחן מועד א' – חדו"א 2 לאודיסאה- 86-148 – 20/07/23

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נביט בפונקציה

$$f(x)=e^{(-x^2)}$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל$f(x)$.

נתחיל מהטור הידוע

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

נציב $-x^2$ ונקבל כי

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

ב. חשבו את $f^{(38)}(0)$ ואת $f^{(47)}(0)$.

ראשית כיוון שמדובר בפונקציה זוגית ($f(-x)=f(x)$) מתקיים כי $f^{(47)}(0)=0$.

כעת נמצא את המקדם של x^{38}.

חזקת 38 תתקבל כאשר $2n=38$ כלומר $n=19$

ולכן המונום בטור החזקות הוא

$$\frac{(-1)^{19}x^{38}}{19!}$$

כלומר המקדם של x^{38} הוא $-\frac{1}{19!}$

לפי הנוסחא למקדמים של טיילור נקבל כי

$$-\frac{1}{19!}=\frac{f^{(38)}(0)}{38!}$$

וסה"כ

$$f^{(38)}(0)=-\frac{38!}{19!}$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \sqrt[n]{e^x}$$

נתחיל מחישוב פונקצית הגבול

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{x}{n}} = e^0 = 1$$

כעת יהי $n \in \mathbb{N}$, נחקור את ההפרש בין פונקציה בסדרה לבין פונקצית הגבול

$$f_n(x) - f(x) = e^{\frac{x}{n}} - 1$$

מדובר בפונקציה עולה, ולכן ערכי הקיצון נמצאים בקצוות.

נחשב גבולות:

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) - f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{n}} - 1 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) - f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{n}} - 1 = -1$$

א. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $[0,\infty)$.

בעזרת החישובים לעיל, נחשב ישר את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \infty$$

ולכן הסדרה אינה מתכנסת במ"ש, כי $d_n \nrightarrow 0$.

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $(-\infty,0]$.

בעזרת החישובים לעיל, נחשב ישר את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{x\in(-\infty,0]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

ולכן הסדרה אינה מתכנסת במ"ש, כי $d_n \nrightarrow 0$.

3. תהי $u(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית, ותהי $f(x)$ פונקציה גזירה.

נגדיר את הפונקציה $h(x,y)=f(x+2y)+u(x,f(2x+y)+2y)$,

ונגדיר את הפונקציה $g(x)=h(x,x)$.

א. הביעו את $h_x(x,y)$ באמצעות f,f',u_x,u_y.

$$h_x(x,y)=f'(x+2y)\cdot 1+\left[u_x(x,f(2x+y)+2y)\cdot 1+u_y(x,f(2x+y)+2y)\cdot f'(2x+y)\cdot 2\right]$$

ב. הביעו את $g'(x)$ באמצעות f,f',u_x,u_y.

ראשית נחשב את הפונקציה g

$$g(x)=h(x,x)=f(3x)+u(x,f(3x)+2x)$$

ולכן

$$g'(x)=f'(3x)\cdot 3+u_x(x,f(3x)+2x)\cdot 1+u_y(x,f(3x)+2x)\cdot(f'(3x)\cdot 3+2)$$

4. נביט בפונקציה $f(x,y)=x^2+2xy+y^3$

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $(1,1)$.

הנוסחא הכללית למשוואת המישור המשיק היא

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

כאשר $z_0=f(x_0,y_0)=f(1,1)=4$

נחשב את הנגזרות החלקיות

$$f_x(x,y)=2x+2y$$

$$f_y(x,y)=2x+3y^2$$

לכן

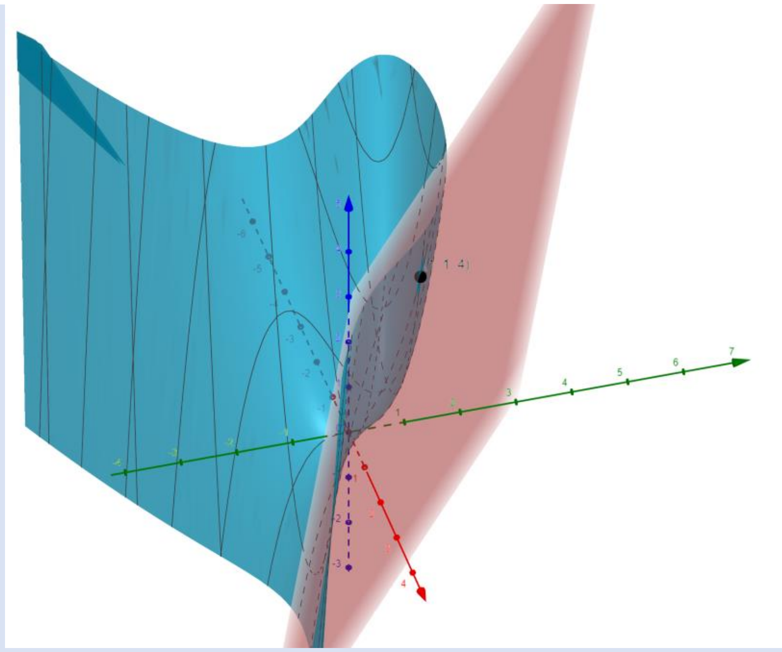
$$f_x(1,1)=4$$

$$f_y(1,1)=5$$

וסה"כ משוואת המישור המשיק היא

$$z-4=4(x-1)+5(y-1)$$

המחשה בדף הבא:



ב. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x,y)$ (מינימום, מקסימום או אוכף).

ראשית נמצא את הנקודות הקריטיות, בהן הגרדיאנט מתאפס:

$$\nabla f(x,y)=0$$

כלומר

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

כלומר

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+3y^2=0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה $y=-x$

ולכן

$$2x+3(-x)^2=0$$

$$x(2+3x)=0$$

$$x=0,-\frac{2}{3}$$

ומצאנו שתי נקודות קריטיות

$$(0,0),\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

כעת נחשב את הנגזרות השניות

$$f_{xx}(x,y) = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = 2$$

$$f_{yy}(x,y) = 6y$$

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 12y - 4$$

כעת

$$\Delta(0,0) = -4 < 0$$

ולכן מדובר בנקודת אוכף

$$\Delta\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = 12 \cdot \frac{2}{3} - 4 = 4 > 0$$

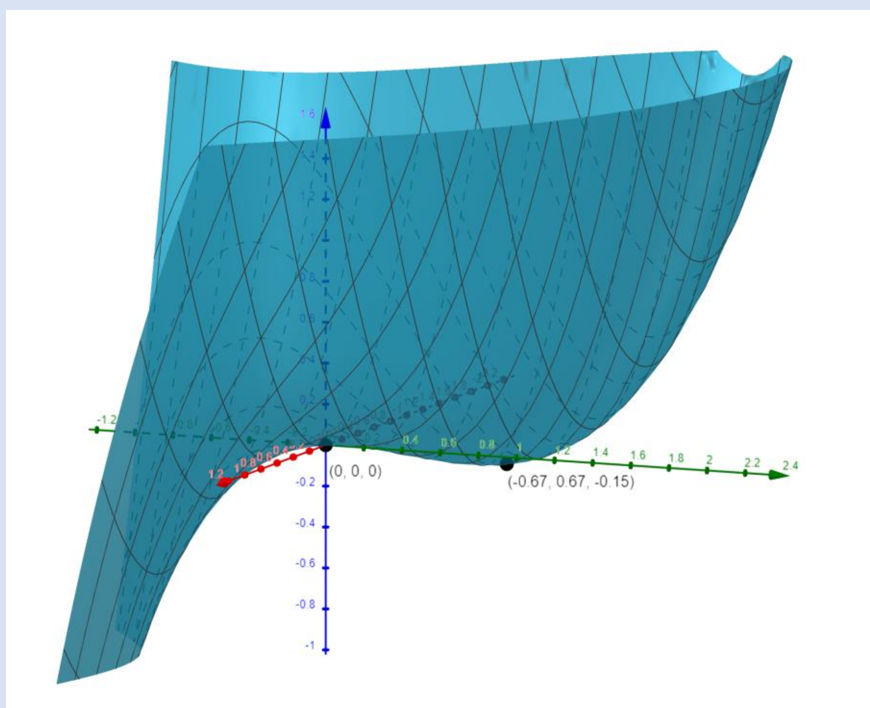
ולכן מדובר בנקודת קיצון.

כמו כן

$$f_{xx}\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$$

ולכן מדובר בנקודת מינימום מקומי.

המחשה:



5. רמי הכין עוגה שהתחתית שלה היא התחום $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2\}$ וגובהה הוא $f(x,y)=4-x^2-y^2$.
מצאו את שטח הפנים הכולל של העוגה של רמי (תחתית, קירות ותקרת העוגה), וכן את נפח העוגה.

תחתית העוגה היא התחום D שהוא מעגל ברדיוס $\sqrt{2}$, ולכן שטח התחתית הוא

$$\pi\left(\sqrt{2}\right)^2=2\pi$$

שטח קירות העוגה נתון ע"י אינטגרל קווי מסוג ראשון לאורך המסילה C, שהיא שפת התחום D.

הפרמטריזציה של המסילה היא

$$r(t)=\left(\sqrt{2}\cos(t),\sqrt{2}\sin(t)\right),\ \ t\in[0,2\pi]$$

ולכן שטח הקירות הוא

$$\int_C f\,dr=\int_0^{2\pi}(4-2)\sqrt{2\sin^2(t)+2\cos^2(t)}\,dt=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}dt=4\sqrt{2}\pi$$

כעת, שטח פני החלק העליון של העוגה נתון ע"י אינטגרל משטחי מסוג ראשון על המשטח שנקרא לו M של הפונקציה 1.

הפרמטריזציה של התחום היא

$$\vec{s}(\theta,r)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta),f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=$$

$$=(r\cos(\theta),r\sin(\theta),4-r^2)$$

כאשר $\theta\in[0,2\pi]$ וכן $r\in\left[0,\sqrt{2}\right]$

$$\vec{s}_r=(\cos(\theta),\sin(\theta),-2r)$$

$$\vec{s}_\theta=(-r\sin(\theta),r\cos(\theta),0)$$

$$\vec{s}_r\times\vec{s}_\theta=\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -2r\\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0\end{pmatrix}\right|=$$

$$=|(-2r^2\cos(\theta),2r^2\sin(\theta),r)|=\sqrt{4r^4+r^2}=r\sqrt{4r^2+1}$$

ולכן

$$\int_M 1dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}1\cdot r\sqrt{4r^2+1}dr\,d\theta$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{4r^2+1}dr=\begin{Bmatrix} t=4r^2+1\\ dt=8rdr\end{Bmatrix}=\frac{1}{8}\int_1^9\sqrt{t}dt=\frac{1}{8}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}[3^3-1]=\frac{26}{12}=\frac{13}{6}$$

ולכן סה"כ

$$\int_M 1dS = 2\pi \cdot \frac{13}{6} = \frac{13\pi}{3}$$

סה"כ <u>שטח הפנים</u> של העוגה הוא

$$2\pi + 4\sqrt{2}\pi + \frac{13}{3}\pi = \left(\frac{19}{3} + 4\sqrt{2}\right)\pi$$

נפח העוגה נתון ע"י האינטגרל הכפול על התחום D של הפונקציה f

נבצע החלפה לקואורדינטות קוטביות

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr\,d\theta$$

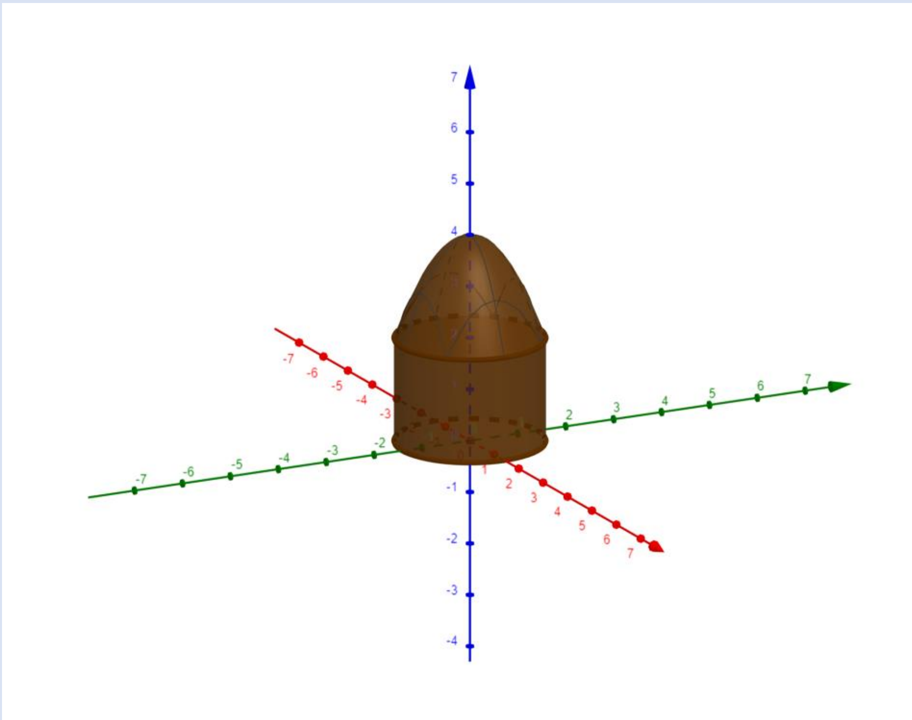
נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{\sqrt{2}}(4r - r^3)dr = \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 4 - 1 = 3$$

ולכן סה"כ <u>נפח העוגה</u> הוא

$$\iint_D f dxdy = 6\pi$$

המחשה:



6. נביט בתחום חצי מעגל היחידה במישור $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$ בעל השפה C, ונביט בשדה הוקטורי

$$\vec{F}=(e^x y)\hat{\imath}+(x+e^x)\hat{\jmath}$$

חשבו את האינטגרל הקווי מסוג שני של השדה הוקטורי על השפה C נגד כיוון השעון:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}$$

לפי משפט גרין, מתקיים כי

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\iint_D (1+e^x-e^x)dxdy=\iint_D 1dxdy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\int_0^\pi\int_0^1 rdr\,d\theta=\frac{1}{2}\pi$$