

אלגברה לינארית תשפ"ה

סמסטר ב מועד א

י"ח בתמוז ה'תשפ"ה, 14/07/2025

הוראות

- מרצים: אריאל ויצמן ותומר באואר.
- מתרגל: גל כהן.
- יש לענות על כל שאלות הבחינה. סך הניקוד הוא 104 נק', לא ניתן לקבל ציון מעל 100.
- אין חומר עזר, מותר מחשבון.
- זמן הבחינה: 3 שעות.
- המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
- יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

שאלות

1. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיסים לתתי-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^3$ (5 נק' לכל סעיף):

- i. $N(A)$
- ii. $C(A)$
- iii. $N(A) + C(A)$
- iv. $N(A) \cap C(A)$

(ב) (10 נק') האם A הפיכה?

אם כן מצאו את ההופכית A^{-1} , אם לא מצאו מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך ש $AB = 0$.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (8 נק' לסעיף):

(א) קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

$$T(1+x) = T(1-x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.}$$

$$1 \in \ker T \quad \text{ii.}$$

(ב) קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ חח"ע.

(ג) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים: אם $A^2 + A$ הפיכה אז A הפיכה.

(ד) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מתקיים: המטריצה $AA^t \in \mathbb{R}^{m \times m}$ לכסינה.

(ה) הקבוצה

$$S = \{a + bx + (a+b)^2 x^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$$

היא תת־מרחב של $\mathbb{R}_2[x]$.

3. (12 נק') עבור אילו ערכים של $a, b \in \mathbb{R}$ המטריצה A הבאה לכסינה?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & a & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

4. נתונה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב העצמי של ערך עצמי $0, V_0$.

(ב) (12 נק') הסבירו למה קיימות מטריצה P אורתוגונלית (כלומר, שעמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^4$ לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית) ומטריצה אלכסונית D כך ש

$$P^{-1}AP = D$$

ומצאו את P, D .

בהצלחה!