בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה 88-195 תשס"ט סמסטר קייץ מועד ב

מרצים: ד"ר אלי בגנו ומר שי סרוסי

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק**, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ציון:

בהצלחה

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 1

תהי X קבוצה לא ריקה ויהי R יחס שקילות על X.

חתך S של היחס R הינו תת קבוצה של X כך שלכל $x \in X$, הקבוצה $S \cap [x]_R$ בעלת איבר אחד.

א. (17) הוכיחו שלכל יחס שקילות R על קבוצה לא ריקה X קיים חתך S.

רמז: יהי R יחס שקילות על X, הגדירו

$T = \{A \subseteq X \mid$ לכל $x \in X$, בקבוצה $A \cap [x]_R$ יש לכל היותר איבר אחד$\}$

והשתמשו בלמה של צורן לקבלת קבוצה מקסימלית ב- T, הסיקו שקבוצה זו היא חתך.

ב. (5) נניח ש $|X| = a \geq \aleph_0$, ותהי $b < a$ עוצמה כך שלכל $x \in X$, $|[x]_R| \leq b$. הוכיחו כי $|S| = a$.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 2

א. (6) בכמה תמורות על המספרים $\{1,2,...,n\}$ ($n>1$) המספר n מופיע לפני המספר $n-1$? (לאו דווקא צמודים זה לזה) הוכח!.

ב. (8) בכמה תמורות על המספרים $\{1,2,...,n\}$ ($n>2$) מתקיים התנאי הבא: "המספר n מופיע לפני המספר $n-1$ והמספר $n-1$ מופיע לפני המספר $n-2$ " ? (לאו דווקא צמודים זה לזה) הוכח!.

ג. *(6) הוכח או הפרך: לכל קבוצה A קיימת תת קבוצה B כך ש $|P(A\times B)|>|A|$.*

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 3

ענה בדיוק על שנים מתוך שלשת הסעיפים הבאים:

1. (10) בכמה אפשרויות ניתן לסדר 20 כדורים זהים ב-5 תאים שונים כך שאין תא המכיל בדיוק 3 כדורים. (לאו דווקא באופן שבכל תא אותו מספר כדורים) (רמז: הכלה והדחה).

2.(10) מצאו תנאי התחלה ויחס רקורסיה עבור $f(n)$ שהוא מספר הסדרות באורך n מתוך הא"ב $\{0,1\}$ בהן בין כל שני 0-ים יש לפחות 3 1-ים.

3. (10) תהיינה A, B קבוצות, הוכח או הפרך:

א. אם $A \cap B = \phi$ אז $P(A) \cap P(B) = \phi$.

ב. אם C ו D קבוצות כך ש $A \cap C \subseteq B \cap D$ אז $C \subseteq D$

ג. אם C ו D קבוצות כך ש $A \cup C \subseteq B \cup D$ אז $A \subseteq D$

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 4

תהי A קבוצה אינסופית.

א. (2) נסמן $T=\{X\subseteq A: |X|=|A|\}$, כלומר קבוצת תתי הקבוצות של A מעוצמה $|A|$. הוכיחו ש $|T|\le 2^{|A|}$.

ב. (8) הוכיחו שקיימות $B,C\subseteq A$ כך ש $B\cup C=A$, $B\cap C=\phi$ ו $|A|=|C|=|B|$. רמז: לכל עוצמה אינסופית a, מתקיים $a+a=a$ ולכן קיימות A_1, A_2 זרות...

ג.(4) נגדיר פונקציה $f:P(B)\to\{D\,|\,C\subseteq D\subseteq A\}$ (B ו- C מסעיף א) ע״י $f(X)=X\cup C$. הוכיחו ש f הפיכה.

ד. (2) הוכיחו שכל D כנ״ל היא מעוצמה $|A|$.

ה. (3) הוכיחו בעזרת סעיפים ג ו-ד ש $|T|\ge 2^{|A|}$.

ו. (1) הסיקו ש $|T|=2^{|A|}$.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 5

א. תהי U קבוצה, ותהיינה $S,T \subseteq U$, נגדיר פונקציה $g : P(U) \to P(U)$ ע"י $g(A) = T \cap (S \cup A)$ לכל $A \in P(U)$.

1. (4) הוכיחו $g = g^2$. ($g^2 = g \circ g$).

הוכח או הפרך:

2. (3) g חח"ע (לכל בחירה של $S,T \subseteq U$)
3. (3) g על. (לכל בחירה של $S,T \subseteq U$)

ב. (10) *נתונות פונקציות* $g : X \to X$ $f : X \to X$*. נתון ש:* $f \circ g \circ f$ *הפיכה. הוכיחו:*

1. f *הפיכה.*

2. g *הפיכה. רמז: הציגו את* g *כמכפלה של פונקציות הפיכות.*

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 6

1. (8) תהי A קבוצה לא ריקה, יהי $R \subseteq A \times A$ יחס שקילות, כך שהיחס המשלים $\bar{R} = (A \times A) \setminus R$ טרנזיטיבי. הוכיחו ש $|A/R| = 1$. (כלומר עצמת קבוצת המנה היא 1).

2. (12) על Z נגדיר שני יחסים : S,T :

$(k,m) \in S \Leftrightarrow k-m$ כפולה של 5.

$(k,m) \in T \Leftrightarrow k+m$ כפולה של 5.

ידוע ש S יחס שקילות.

הוכיחו או הפריכו :

א. (2) T הוא יחס רפלקסיבי.

ב. (2) T הוא יחס סימטרי.

ג. (2) T הוא יחס טרנזיטיבי.

ד. (6) הוכיחו ש $S \cup T$ הוא יחס שקילות ומצאו את מחלקות השקילות השונות. מצאו $|Z/(S \cup T)|$.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 7

א.(10) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה m כדורים לבנים (זהים) ו n כדורים שחורים (זהים) כך שאף שני כדורים שחורים לא יהיו סמוכים? רמז: הניחו תחילה את הכדורים הלבנים.

ב. (10) תהי $S=\{(a,b,c)\,|\,1\le a,b,c\le 100, a<b, a<c\}$.

1. הוכיחו ש $|S|=\sum_{k=1}^{99}k^2$.
2. הוכיחו ש $|S|=\binom{100}{2}+2\binom{100}{3}$.
3. הוכיחו שלכל n טבעי: $\sum_{k=1}^{n}k^2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$.