

חקר ביצועים - הרצאה 12

2 בפברואר 2012

תורת המשחקים

משחקי 2 שחקנים סכום 0

שחקן אחד זוכה בכל מה שהשני מפסיד - סכום הרווח נטו של שניהם הוא 0.

דוגמה

2 שחקנים מראים בו זמנית אצבע או שתיים. אם מספר האצבעות שהם מראים זהה אז שחקן א' זוכה ב1 שח משחקן ב'. אם מס' האצבעות שונה אזי שחקן ב' זוכה ב1 ש"ח משחקן א'.. טבלת התשלומים לשחקן א':

		שחקן ב'	
		אצבע	2 אצבעות
שחקן א'	אצבע	1	-1
	2 אצבעות	-1	1

טבלת התשלומים לשחקן ב':

		שחקן ב'	
		אצבע	2 אצבעות
שחקן א'	אצבע	-1	1
	2 אצבעות	1	-1

משחק מאופיין ע"י:

1. האסטרטגיות של שחקן א'.
2. האסטרטגיות של שחקן ב'.
3. טבלת תשלומים (בדר"כ של שחקן א', טבלה של שחקן ב' מתקבלת ע"י כפל ב-1).

הערה

מס' האסטרטגיות של השחקנים לא חייב להיות שווה.

אסטרטגיות שולטות ואסטרטגיות נשלטות

תהי טבלת התשלומים הבאה של שחקן א', בה לכל שחקן 3 אסטרטגיות:

		שחקן ב'		
		1	2	3
שחקן א'	אסטרטגיות	1	2	3
	1	1	2	4
	2	1	0	5
3	0	1	-1	

ללא קשר לאסטרטגיה של שחקן ב', שחקן א' לא ישחק את אסטרטגיה 3 כי היא פחות טובה מאסטרטגיה 1 ולכן הוא ישמיט אותה.

ולכן נגיד שאסטרטגיה 1 שולטת תחתית על 3 ואסטרטגיה 3 נקראת נשלטת.

בשלב השני, שחקן ב' לא ישחק באסטרטגיה 3 כי היא נשלטת ע"י אסטרטגיות 1 ו2.

בשלב הבא, שחקן א' ישמיט את אסטרטגיה 2 הנשלטת ע"י 1.

ובסוף, שחקן ב' לא ישחק את אסטרטגיה 2 וישמיט אותה.

מסקנה - שחקן א' ישחק אסטרטגיה 1 ושחקן ב' ישחק אסטרטגיה 1 והתוצאה: שחקן א' ירוויח שקל.

ערך המשחק הינו 1 ש"ח (מסומן ב'V).

עקרון ה min max

		שחקן ב'			min
		1	2	3	
שחקן א'	אסטרטגיות	1	2	3	
	1	-3	-2	6	-3
	2	2	-1	2	-1
3	5	-2	-4	-4	
max		5	-1	6	

כל שחקן מעוניין למזער הפסדיו.

שחקן א':

אם יבחר באסטרטגיה 1 עלול להרוויח 6 אבל גם להפסיד 3. מכיוון ששחקן ב' רציונלי הוא ירצה להבטיח את עצמו מהפסד וימנע מתשלום גבוה לשחקן א'. (יכול לבחור למשל באסט' 1).

אם שחקן א' יבחר באסט' 3 הוא עלול להפסיד 4 אם שחקן ב' יהיה נבון. אם שחקן א' יבחר באסט' 2 מובטח לו לא להפסיד יותר מ 1 ויש לו סיכוי לזכות ב 2.

שחקן ב':

אם יבחר באסט' 1 עלול להפסיד 5. אם יבחר באסט' 3 עלול להפסיד 6. אם יבחר באסט' 2 הוא עלול להפסיד -1 כלומר להרוויח 1.

כלומר, ע"י נקיטת אסט' 2 ע"י שחקן א', שחקן א' יודע שיפסיד לא יותר מ 1. כל שחקן משחק במטרה להביא למינימום את הפסדיו המקסימליים, וזהו קריטריון המינימקס: שחקן א' - מקסימום של תשלומים מינימליים:

$$\max \{-3, -1, -4\}$$

וזאת תיקרא אסטרטגיית ה max min.

שחקן ב' - מינימום של תשלומים מקסימליים:

$$\min \{5, -1, 6\}$$

וזאת תיקרא אסטרטגיית ה min max.

הגדרות

1. ערך ה max min הינו הערך התחתון של המשחק, מסומן ב \underline{V} .

2. ערך ה min max הינו הערך העליון של המשחק, מסומן ב \bar{V} .

3. כאשר יש שוויון אזי $\bar{V} = \underline{V} = V$ ואז V נקרא ערך המשחק. כלומר, ישנה נק' אוכף. בדוגמה האחרונה, $\bar{V} = \underline{V} = V = -1$.

הערה

כשיש נק' אוכף, אף שחקן לא יכול לשפר את תשלומו ע"י סטיה מאסטרטגיית min max (מיד נראה דוגמה).

פתרון זה, נקרא פתרון יציב.

טענה

$\bar{V} \geq \underline{V}$, כלומר

$$\min \max \geq \max \min$$

דוגמה לאי קיום של נק' אוכף

		שחקן ב'			min
		1	2	3	
שחקן א'	אסטרטגיות	1	2	3	
	1	0	-2	2	-2
	2	5	4	-3	-3
3	2	3	-4	-4	
max		5	4	2	

אם שחקן א' יבחר באסטרטגיה 1 ושחקן ב' יבחר באסט' 3, אז שחקן א' ירוויח 2, אבל שחקן ב' לא רוצה

להפסיד ואם הוא יחשוב ששחקן א' יבחר ב1 הוא יבחר ב2 וירוויח 2, אבל גם שחקן א' יודע לחשוב ואם הוא חושב ששחקן ב' יבחר ב2 הוא יבחר ב1 וירוויח 4, וכך נמשיך ויווצר מעגל וזהו חוסר יציבות.

הגדרה

אסטרטגיה טהורה - אם אסטרטגיה של שחקן מסויים היא לבחור שורה (או עמודה) אחת ויחידה. כתוצאה מכך שאין נק' אוקף, יש מעגל. הפתרון הוא להסתיר מהיריב את האסטרטגיה ונעשה זאת ע"י שימוש באסטרטגיות מעורבות.

אסטרטגיות מעורבות

בהעדר נק' אוקף, אסטרטגיות טהורות לא פועלות ולכן נשתמש בהסתברויות, כדי שהיריב לא ידע מראש בדיוק באיזו אסט' תבחר.

נסמן:
 x_i - ההסתברות ששחקן א' ישתמש באסט' i כאשר $i = 1, \dots, m$.
 y_j - ההסתברות ששחקן ב' ישתמש באסט' j כאשר $j = 1, \dots, n$.

הגדרה

לפילוגי ההסתברויות (x_1, \dots, x_m) ו (y_1, \dots, y_n) קוראים אסטרטגיות מעורבות. כמובן שמתקיים:

$$\sum x_i = \sum y_j = 1$$

תוחלת התשלומים היא:

$$E = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \text{Pay}_{ij} x_i y_j$$

כאשר Pay_{ij} = תשלום של ב' לא' כאשר נבחר הזוג (i, j) .
 אנו מניחים אי תלות בין i ל j .

קריטריון min max

כל שחקן חייב לבחור אסטרטגיה מעורבת שממקסמת את תוחלת התשלומים המינימלית לו.

משפט min max

באסטרטגיות מעורבות תמיד קיים ערך משחק.
 (הערה - באסט' טהורות כשאין נק' אוקף, $\bar{V} > \underline{V}$).

פתרון גרפי

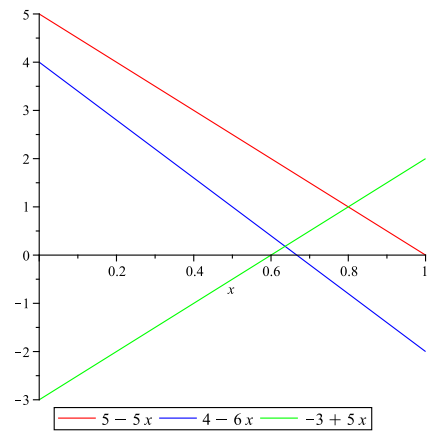
ניתן לעשות זאת כאשר $m = 2$ או $n = 2$.
 שחקן ב'

הסתברות		y_1	y_2	y_3
אסטרטגיות		1	2	3
שחקן א'	x_1	1	0	-2
	$1 - x_1$	2	5	4

אזי:

הסתברויות שחקן ב'	תוחלת התשלום
(1, 0, 0)	$0x_1 + 5(1 - x_1) = 5 - 5x_1$
(0, 1, 0)	$-2x_1 + 4(1 - x_1) = 4 - 6x_1$
(0, 0, 1)	$2x_1 - 3(1 - x_1) = -3 + 5x_1$
(y_1, y_2, y_3)	

נצייר את הישרים הנ"ל:



שחקן א' בודק עבור כל אסטרטגיה מעורבת אפשרית, מהי תוחלת התשלום המינימלית ובוחר באסט' המעורבת שמביאה ערך זה למקסימום.

$$\underline{V} = \max_{0 \leq x_1 \leq 1} \{ \min(-3 + 5x_1, 4 - 6x_1) \}$$

ערך זה מתקבל במפגש הקווים הצהוב והירוק:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7}{11} \\ x_2 &= \frac{4}{11} \end{aligned}$$

וערך המשחק הוא $\frac{2}{11}$. שחקן ב' מעוניין לשלם לא יותר מ $\frac{2}{11}$ עבור כל בחירה של x_1 :

$$y_1(5 - 5x_1) + y_2(4 - 6x_1) + y_3(-3 + 5x_1) \leq \frac{2}{11}$$

יש שוויון עבור $\frac{7}{11}$:

$$y_1 \left(\frac{20}{11} \right) + y_2 \left(\frac{2}{11} \right) + y_3 \left(\frac{2}{11} \right) = \frac{2}{11}$$

אבל

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

ולכן בהכרח $y_1 = 0$, ואפשר למצוא את y_2, y_3 .