

מבוא לאלגברה לינארית - פתרון תרגיל 10 - דרגה של מטריצה

תרגיל 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ מצאו בסיס ל- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1. $R(A)$

2. $C(A)$

3. $N(A)$

4. $R(B)$

5. $C(B)$

6. $N(B)$

פתרון. נדרג את המטריצה A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$R(A) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס למרחב העמודות הן העמודות המקוריות שבהן יש איברים מובילים כלומר

$$C(A) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

ולסיום בסיס למרחב ה-0 הוא

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת נעבור ל- B היא כבר מדורגת לכן

$$R(B) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס למרחב העמודות הן העמודות שבהן יש איברים מובילים כלומר

$$C(B) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ולסיום בסיס למרחב ה-0 הוא

$$N(A) = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{2}{3}t \\ -\frac{5}{3}t \\ t \end{array} \right) \right\} = \left\{ t \left(\begin{array}{c} \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{array} \right) \right\} = \text{Span} \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

תרגיל 2. עבור אילו ערכי a דרגת המטריצה $\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ a^2 & a & a^2 - a \\ a & a & 2a + 1 \end{pmatrix}$ תהיה 2,1 או 3 ? והסק

עבור אילו ערכי a היא תהיה הפיכה.

פתרון. נתון ש-

$$\text{Rank}(A) = \dim(R(A)) = 4$$

ויש 4 שורות לכן, שורות A בת"ל ראשית נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ a^2 & a & a^2 - a \\ a & a & 2a + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - aR_1} \begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 0 & a - a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & 2a + 2 \end{pmatrix}$$

נבדוק מתי האיברען על האלכסון מתאפסים.

• $a = 0$: אם נציב $a = 0$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

במקרה זה הדרגה שווה ל-1.

• $a = 1$: אם נציב $a = 1$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

במקרה זה הדרגה שווה ל-2.

• $a = -1$: אם נציב $a = -1$ נקבל

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

במקרה זה הדרגה שווה ל-2.

• $a \neq 0, 1, -1$: במקרה זה נקבל שיש שלושה איברים מובילים ולכן הדרגה שווה ל-3, ובמקרה זה היא הפיכה.

תרגיל 3. תהי מטריצה $A \in M_{4 \times 8}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{4 \times 8}$ כך ש- $\text{Rank}(A) = 4$

1. האם שורות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

פתרון. נתון ש-

$$\text{Rank}(A) = \dim(R(A)) = 4$$

ויש 4 שורות לכן, שורות A בת"ל.

2. האם עמודות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

פתרון. נתון ש-

$$\text{Rank}(A) = \dim(C(A)) = 4$$

ויש 8 עמודות לכן, עמודות A תל

3. למה שווה $\dim(N(A))$?

פתרון. ידוע ש-

$$\text{Rank}(A) + \dim(N(A)) = 8$$

לכן

$$4 + \dim(N(A)) = 8$$

מכאן

$$\dim(N(A)) = 8 - 4 = 4$$

בהצלחה!!