

פתרון בוחן בדידה 1 למהנדסים, 83-116, סמסטר א תשעט

כ' כסלו 28.11.18

מרצה: עדי בן צבי.

מתרגלים: אריאל ויצמן ועומר נטר.

- ענו על כל השאלות.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה ועשרים.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- כל סעיף מזכה ב-14 נק', לא ניתן לצבור יותר מ-100 נק' בבוחן.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

x	y	$A(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

1. נגדיר את הפסוק $A(x, y)$ התלוי באטומים x, y . נתונה טבלת האמת של הפסוק:

א. מצאו צורת DNF של הפסוק $A(x, y)$.

ב. מצאו צורת CNF של הפסוק $B(x, y)$ המקיים $B(x, y) = \neg A(x, y)$ (כלומר, $B(x, y)$ הוא שלילת הפסוק $A(x, y)$).

ג. תהי D צורת ה- DNF של $A(x, y)$ שמצאתם בסעיף א'. ו- C צורת ה- CNF של $B(x, y)$ שמצאתם בסעיף ב'. הוכיחו/הפריכו: הפסוק $D \vee C$ טאוטולוגיה (כלומר, תמיד "אמת").

פתרון:

א. מי שיש לב, הפסוק הוא בעצם $A(x, y) = x$, וזוהי צורת DNF . אפשר כמובן לעשות לפי האלגוריתם.

ב. נקבל $B(x, y) = \neg x$, וזוהי צורת CNF . דרך נוספת: לעשות דה-מורגן לשלילת מה שעשיתם בסעיף א לפי האלגוריתם ותקבלו CNF של השלילה.

ג. הוכחה: לא משנה איך פתרנו את הסעיפים הקודמים, נקבל $\neg C \equiv \neg B \equiv A \equiv D$ ולכן נקבל $D \vee C \equiv D \vee \neg D \equiv T$.

2. לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את הפרידקט $P(A, n) = n \in A$ (כלומר, הפרדיקט מקבל קבוצה A המוכלת בטבעיים ומספר טבעי n , ומחזיר "אמת" כאשר n איבר בקבוצה A). הוכיחו/הפריכו:

א. $\forall n \exists A : P(A, n)$

ב. $\exists n \forall A : P(A, n)$

ג. $\forall A \exists n : P(A, n)$

ד. $\exists A \forall n : P(A, n)$

פתרון:

א. הוכחה: יהי $n \in \mathbb{N}$, צריך למצוא קבוצה שהוא שייך אליה, אז ניקח למשל את $\{n\}$, וכמובן $n \in \{n\}$.

ב. הפרכה: צריך להראות שלא קיים מספר שנמצא בכל הקבוצות. במילים אחרות: לכל מספר יש קבוצה שהוא לא נמצא בה (שלילת הטענה). נראה זאת: יהי $n \in \mathbb{N}$ אז מתקיים $n \notin \{n+1\}$.

ג. הפרכה: יש קבוצה שאף איבר לא נמצא בה - הקבוצה הריקה. כלומר קיימת $A \subseteq \mathbb{N}$ הלא היא $A = \emptyset$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \notin \emptyset$.

ד. הוכחה: אכן קיימת קבוצה שכל האיברים שייכים אליה: $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \in \mathbb{N}$.

3. מצאו קבוצות A, B, C, D השונות כולן זו מזו, והמקיימות: $A \Delta B = A \setminus (C \cap D)$.

פתרון:

למשל, $A = \{1, 2, 3\}, B = \emptyset, C = \{1\}, D = \{2\}$ אז:

$$A \Delta B = A \Delta \emptyset = A = \{1, 2, 3\}$$

$$A \setminus (C \cap D) = A \setminus \emptyset = A = \{1, 2, 3\}$$

בהצלחה!