

4 ההוכחה מתרגול

בתרגול טענו ש- $R = \mathbb{C}[x, y]/\langle xy-1 \rangle \cong \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. נכתוב הוכחה מלאה לטענה הזו. נגדיר הומומורפיזם $\varphi: \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ לפי $\varphi(x) = t$ ו- $\varphi(y) = t^{-1}$. זה מגדיר את φ על כל $\mathbb{C}[x, y]: \varphi(f(x, y)) = f(t, t^{-1})$. טענה. φ על.

הוכחה. כל איבר של $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ הוא פולינום ב- t, t^{-1} . נכתוב אותו $\sum_{i=-n}^n a_i t^i$ (יש פה חזקות חיוביות וגם שליליות). נתבונן בפולינום $f(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=1}^n a_{-i} y^i$; אזי מתקיים $\varphi(f(x, y)) = \sum_{i=-n}^n a_i t^i$, ולכן φ על. \square
טענה. $\ker \varphi \supseteq \langle xy - 1 \rangle$.

הוכחה. בעצם, מספיק להראות $\varphi(xy - 1) = 0$. למה? נזכור ש- $\langle xy - 1 \rangle$ הוא האידאל הנוצר על ידי $xy - 1$, כלומר זהו האידאל המינימלי של $\mathbb{C}[x, y]$ המכיל את $xy - 1$. כיוון ש- $\ker \varphi$ אידאל, אם $f \in \ker \varphi$ אז גם $\langle f \rangle \in \ker \varphi$. ואכן מחישוב ישיר נקבל כי $\varphi(xy - 1) = tt^{-1} - 1 = 1 - 1 = 0$. \square
טענה. $\ker \varphi = \langle xy - 1 \rangle$.

הוכחה. נתחיל מדוגמה כדי שתמחיש את רעיון ההוכחה. שימו לב ש- $f(x, y) = x^2 y^3 + x^2 y^2 - x - 2y \in \ker \varphi$. למה?

$\varphi(f(x, y)) = t^2 t^{-3} + t^2 t^{-2} - t - 2t^{-1} = t^{-1} + t + t^{-1} - t - 2t^{-1} = 0$. בעצם, היו פה שני חלקים בתוך הפולינום, כל אחד מהם הצטמצם מעצמו: $x^2 y^3 + x^2 y^2 - 2y$ ו- $x - 2y$. מה משותף לכל אחד מן החלקים האלו? אם נוציא מהם חזקות מתאימות של x או של y , נקבל פולינום ב- xy . בנוסף, כל אחד מהחלקים האלו מתחלק בפני עצמו ב- $xy - 1$. נבצע בדיוק את אותו הרעיון במקרה הכללי. ניקח $f(x, y) \in \ker \varphi$, ונכתוב

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n x^k p_k(xy) + \sum_{k=1}^m y^k q_k(xy)$$

(איך הפירוק הזה נראה במציאות? לכל מונום $x^i y^j$ רואים מי מבין המשתנים בחזקה הגבוהה יותר, ומוציאים אותה החוצה). כל אחד מהפולינומים p_k, q_k הוא פולינום במשתנה יחיד מעל \mathbb{C} . לפי ההגדרה,

$$\varphi(f(x, y)) = \sum_{k=0}^n t^k p_k(1) + \sum_{k=1}^m t^{-k} q_k(1) = 0$$

ולכן $p_k(1) = q_k(1) = 0$ לכל k . אבל $p_k(t), q_k(t)$ הם פולינומים במשתנה יחיד ש-1 הוא שורש שלהם, ולכן ניתן לבצע חילוק פולינומים ולכתוב

$$p_k(t) = (t - 1) g_k(t), \quad q_k(t) = (t - 1) h_k(t)$$

לכל k , ואם נציב בחזרה בפולינום המקורי נקבל

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n x^k g_k(xy) (xy - 1) + \sum_{k=1}^m y^k h_k(xy) (xy - 1) \in \langle xy - 1 \rangle$$

□

כנדרש.

הראינו ש- $\varphi : \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ אפימורפיזם עם $\ker \varphi = \langle xy - 1 \rangle$, ולכן ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל $R \cong \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.