אינפי 1 - תרגול 9

בס"ד

משפט ערך הביניים: תהי $f(x)$ פו' רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי y_0 מס' הנמצא בין $f(a)$ ל- $f(b)$. אזי קיימת נקודה $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)=y_0$.

בכיתה הוכחנו רק עבור $y_0=0$, אבל ניתן להכליל את זה לכל $y_0\in[a,b]$.

תרגילים 1. תהי f פו' רציפה בקטע $[0,2]$ כך ש- $f(2)=3$. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0\in[0,2]$ כך ש- $f(x_0)=\frac{1}{x_0}$.

פתרון: נגדיר פו' חדשה $g(x)=x\cdot f(x)$. היא רציפה בקטע $[0,2]$ כמכפלה של פו' רציפות. קיבלנו, $g(0)=0$, $g(2)=6$. $0<1<6$, לכן, לפי משפט ערך הביניים, קיים $x_0\in[0,2]$ כך ש- $g(x_0)=1$ $\Rightarrow$ $x_0 f(x_0)=1$ $\Rightarrow$ $f(x_0)=\frac{1}{x_0}$. מש"ל.

2. תהי $f:[a,b]\to[a,b]$ פו' רציפה. הוכיחו כי קיימת $c\in[a,b]$ המקיימת $f(c)=c$.

פתרון: אם $f(a)=a$ או $f(b)=b$, אז סיימנו. לכן נניח $f(a)\neq a$, $f(b)\neq b$ $\Rightarrow$ $a<f(a)$, כי $f(a)\in[a,b]$, ו- $f(b)<b$, כי $f(b)\in[a,b]$.
נסתכל על הפו' החדשה $g(x)=f(x)-x$. היא רציפה ב- $[a,b]$ כסכום של פו' רציפות. קיבלנו, $g(a)=f(a)-a>0$ כי $a<f(a)$, ו- $g(b)=f(b)-b<0$ כי $f(b)<b$. לכן, לפי משפט ערך הביניים, קיים $c\in[a,b]$ כך ש- $g(c)=0$ $\Rightarrow$ $f(c)-c=0$ $\Rightarrow$ $f(c)=c$. מש"ל.

משפט רול: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b), ונניח קיים $f(a)=f(b)$ אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=0$.

תרגילים: 1. הוכיחו כי לפולינום $10+x+x^3+\frac{x^5}{2}$ יש שורש ממשי אחד בלבד.

פתרון: $f(0)=10$, $f(-2)=-16$. פולינום ~~רציף~~ הוא רציף ב- $[-2,0]$

$c\in(-2,0)$

לכן, לפי משפט ערך הביניים, קיים $\cancel{c\in(\ )}$ כך ש- $f(c)=0$.

נניח בשלילה שיש שתי פתרונות למערכת. כלומר, קיימים

$c,d\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(c)=f(d)=0$.

לפי משפט רול, קיים $x_0\in(c,d)$ כך ש- $f'(x_0)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}=0$.

אבל, $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ לכל x, סתירה.

2. מצאו את מס' הפתרונות של המשוואה x^4+3x+1 ב- $[-2,-1]$.

<u>פתרון:</u> נסמן $f(x)=x^4+3x+1$. $f(-2)=11$ ו- $f(-1)=-1$.

$f(-2)\cdot f(-1)<0$, לכן אפשר להשתמש במשפט ערך הביניים.

נניח כי יש למשוואה פתרון בקטע. כלומר, קיים $c\in[-2,-1]$

כך ש- $f(c)=0$. בקטע $[-2,c]$ הפו' מקבלת כל ערך בין 11

ל- 0 (ובפרט את הערך $-\frac{1}{2}$) (לפי משפט ערך הביניים)

בקטע $[c,-1]$ הפו' מקבלת כל ערך בין -1 ל- 0, ובפרט את

הערך $-\frac{1}{2}$: כלומר, יש x_1,x_2 כך ש- $f(x_1)=f(x_2)=-\frac{1}{2}$.

לפי משפט רול, קיימת נקודה $d\in[x_1,x_2]$ כך ש-

$f'(d)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$.

אבל, $f'(x)=4x^3+3 \Rightarrow$ $f'(x)=0$ רק עבור $x=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

שלא נמצא בתחום. לכן ב- $[-2,-1]$ הנגזרת לא מתאפסת, סתירה!

לכן, אין פתרונות נוספים בתחום.

3. תהי f גזירה ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $f(1)=0$, $f(x)\neq0$ לכל

$x\in(0,1)$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(0,1)$ המקיימת $c=\frac{-f(c)}{f'(c)}$

<u>פתרון:</u> נסתכל על הפו' $g(x)=xf(x)$. גזירה כמכפלה של פו'

גזירות. $g(0)=0$, $g(1)=0$, לכן קיים $c\in(0,1)$ כך ש-

$g'(c)=0$. $g'(x)=f(x)+xf'(x)$

$\Rightarrow g'(c)=f(c)+cf'(c)=0$

$\Rightarrow cf'(c)=-f(c) \Rightarrow c=\frac{-f(c)}{f'(c)}$ מש"ל

4. (א) האם ההפך של המשפט נכון? כלומר, נניח ש- $f(x)$ רציפה

ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b), ומקיימת c כך ש- $f'(c)=0$.

האם יש x_1,x_2 כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$?

פתרון: לא. נסתכל למשל על הפו' $f(x)=x^3$ בקטע $[-1,1]$. $0\in[-1,1]$

ומתקיים $f'(0)=3\cdot0^2=0$. אולם, לכל a,b, $b\neq a \Rightarrow a^3\neq b^3$.

לכן אין שתי נקודות a ו- b כך ש- $f(a)=f(b)$.

משפט הערך הממוצע של לגרנז': תהי f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b). אזי קיימת c כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

תרגיל: 1 תהי f פו' גזירה ב- (a,b), כך ש- $f'(x)=0$ לכל x בקטע. הוכיחו ש f פו' קבועה בקטע.

פתרון: יהיו $x_1\neq x_2$ בקטע. לפי לגרנז' קיים $c\in(x_1,x_2)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. אבל $f'(c)=0$ כי $c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$. ולכן

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2).$$

זה נכון לכל 2 נקודות בקטע, לכן הפו' קבועה.

תרגיל: הוכיחו שלכל $0<a<b$ מתקיים $\frac{b-a}{1+b}<\ln\frac{1+b}{1+a}<\frac{b-a}{1+a}$

פתרון: תזכורת: $\ln\frac{y}{x}=\ln y-\ln x$

לכן: $\ln\frac{1+b}{1+a}=\ln(1+b)-\ln(1+a)$

נחלק את כל אגפי האי-שוויון ב- $b-a$. (מותר כי $b\neq a$)

ולכן $b-a>0$ ונקבל: $\frac{1}{1+b}<\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}<\frac{1}{1+a}$

וזה בדיוק מה שאנחנו צריכים להוכיח.

ניתן לראות שהאגף האמצעי הוא מהצורה $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ כאשר $f=\ln(1+x)$. ממשפט לגרנז' נקבל שקיים $c\in(a,b)$ כך ש

$$\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}=[\ln(1+x)]'|_c=\frac{1}{1+c}$$

$$\frac{1}{b+1}<\frac{1}{c+1}<\frac{1}{a+1} \Leftarrow a+1<c+1<b+1 \Leftarrow a<c<b$$

ולכן, $\frac{1}{b+1}<\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}<\frac{1}{1+a}$. מש"ל

גבולות באינסוף

1) נסמן $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$, אם לכל H אינסופי חיובי: $f(H)\approx L$

באותו אופן, נסמן $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ אם לכל H אינסופי שלילי $L\approx f(H)$.

ד. נסמן $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ אם לכל $c\neq x\approx c$ $f(x)$ הוא אינסופי חיובי.

באותו אופן, נסמן $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$ אם לכל $c\neq x\approx c$, $f(x)$ הוא אינסופי שלילי.

שימו לב שאפשר להגדיר גבולות אלה גם $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ וכו'.

תרגילים: חשב את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$. פתרון: $st\,\underbrace{\frac{1}{H}}_{\text{אינפי}}=0$ עבור H אינסופי חיובי

2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$. פתרון: $st\,\underbrace{\frac{1}{H}}_{\text{אינפי}}=0$ עבור H זה אינסופי שלילי.

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3+1}{2x^4-4x^2+5}$

פתרון: $st\,\frac{H^4-H^3+1}{2H^4-4H^2+5}=st\,\frac{1-\frac{1}{H}+\frac{1}{H^4}}{2-\frac{4}{H^2}+\frac{5}{H^4}}=\frac{1}{2}$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos^2x+\sin x}{x}$

פתרון: $st\,\underbrace{\frac{\overbrace{\cos^2H+\sin H}^{\text{סופי}}}{\underbrace{H}_{\text{אינסופי}}}}_{\text{אינפי}}=0$

5. $\lim_{x\to\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}$

פתרון: $st\,\underbrace{\sin H}_{\text{סופי}}\,\underbrace{\sin\frac{1}{H}}_{\text{אינפי}}=0$

6. $\lim_{x\to 0^+}\ln x$.

פתרון: אנחנו צריכים להסתכל על $\ln\epsilon$ עבור ϵ אינפיניטסימלי חיובי.

לכל r ממשי, ידוע ש-e^r ממשי חיובי.

לכן $\epsilon<e^r$ לכל r ממשי (למה זה?)

$\Downarrow$

$\ln\epsilon<\ln e^r=r$ לכל r ממשי.

לכן $\ln H$ הוא אינסוף שלילי.

ובסימון, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

7. $\lim_{x\to\infty} x\sin x$

<u>פתרון:</u> אם נבחר $H=2\pi N$ עבור N היפר-שלם אינסופי

נקבל $f(H) = 2\pi N\cdot\sin 2\pi N = 2\pi N\cdot 0$

(אנחנו יודעים ש- $\sin 2\pi n=0$ לכל n שלם, לפי עקרון ההעברה זה נכון

גם לכל מס׳ היפר-שלמים שלם)

מצד שני, אם ניקח $H=2\pi N+\frac{\pi}{2}$ נקבל:

$f(H) = (2\pi N+\frac{\pi}{2})\sin(2\pi N+\frac{\pi}{2}) = (2\pi N+\frac{\pi}{2})\cdot 1$

אינסוף חיובי.

ואם ניקח $H=2\pi N+\frac{3\pi}{2}$ נקבל:

$f(H) = (2\pi N+\frac{3\pi}{2})\sin(2\pi N+\frac{3\pi}{2}) = (2\pi N+\frac{3\pi}{2})(-1)$

אינסוף שלילי.

קיבלנו שאין גבול (כי הוא תלוי בבחירת H)

8. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$

<u>פתרון:</u> $st\frac{\sqrt{H^2+1}}{-2H} = st\frac{\sqrt{H^2+1}\cdot\frac{1}{H}}{-2H\cdot\frac{1}{H}} = st\frac{\sqrt{1+\frac{1}{H^2}}}{-2} = -\frac{1}{2}$

עבור H אינסוף
חיובי לכן
הצבנו $-H$)

9. $\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$

<u>פתרון:</u> $f(H)=H\cdot\left[\frac{1}{H}\right]$. $\frac{1}{H}$ הוא אינפ׳, ולכן $\left[\frac{1}{H}\right]=0$, ולכן

$f(H)=H\cdot 0=0$

$st\, f(H)=0$

כלומר $\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]=0$

10. $\lim_{x\to\infty} \cos x\sin x$

<u>פתרון:</u> $\cos x\sin x = \frac{\sin 2x}{2}$

I. נקח $H=\pi N$

סוף?

$$\frac{\sin 2\pi N}{2} = 0$$

II נקח $\frac{\pi}{4}+N\pi = x_n$

$$\frac{\sin (2\pi N + \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1}{2}$$

לכן אין גבול (תלוי בבחירת ד)

<u>תרגיל:</u> הוכח: אם $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ אז $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=0$

<u>פתרון:</u> $f(c+\Delta x)$ הוא אין סוף חיובי. לכן $\frac{1}{f(c+\Delta x)}$ הוא אינפי'

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = st\,\frac{1}{f(c+\Delta x)} = 0$$