31/12/13 קפ

טענה: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ עבור $n \in \mathbb{N}$

הוכחה אלגברית:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} \quad \square$$

הוכחה קומבינטורית:

← כמה תתי קבוצות יש ל-$[n]$?

← אגף שמאל הוא גודל של קבוצת החזקה $P([n])$ שראינו שהוא 2^n או ישירות כל איבר ב-$[n]$ יכול להיות בתת הקבוצה, או לא.

(לכן יש תהליך n שלבי)

← אגף ימין ← נבחר את גודל תת הקבוצה ונסמנו k, ואז נבחר תת הקבוצה בגודל k ב- $\binom{n}{k}$ דרכים.

הגדרה: סדרה a_i נקראת אוני מודלית אם קיים i כך שלכל

$1 \le j < i$ $a_j \le a_{j+1}$

וגם $j \ge i$ $a_j \ge a_{j+1}$

טענה: לכל n הסדרה $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ הינה אוניומודלית.

הוכחה: (תרגיל בית $\square$)

(רמז: הביטו ביחס $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$)

31/12/13 קומב'

קבוצה הרכבה

סיכום ← מספר הדרכים לחלק k כדורים ל n.

	כדורים שונים	זהים
כדור אחד לכל היותר בתא	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
ללא מגבלה	n^k	$\binom{n+k-1}{n-1}$

כאשר $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ עבור $0\le k\le n$

דוגמא: נתון מלאי כדורים אינסופי בשלושה צבעים R,G,B.
בכמה דרכים ניתן להרכיב קבוצה בת 300 כדורים מהמלאי?
← זה כמו לחלק 300 כדורים זהים לשלושה תאים שמסומנים R,G,B
(כדורים זהים + ללא מגבלה)

לכן יש לנו $\binom{3+300-1}{3-1} \sim \frac{300^2}{2} \sim$ 40-50 אלף...

אז איך מחשבים את זה? $\frac{302!}{2!300!}=\frac{301\cdot 302}{2}$

המשך לדוגמא: כעת נרצה להרכיב קבוצה שגודלה לכל היותר 300.
← כמו לקחת 300 כדורים זהים ולחלק אותם ל-4 תאים: $\sum_{k=0}^{300}\binom{k+3-1}{3-1}$
לא נחשב, R,G,B

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{300}\binom{k+3-1}{3-1} \overset{\text{4 תאים}}{=} \binom{300+4-1}{4-1}$$

זו היתה הוכחה קומבינטורית (הוכחת זהות ותשובה מספרית ← שוויון בין זהים)

הוכחה קומבינטורית: 1) הצגת בעיה.
2) הוכחה כי אגף ימין עונה על הבעיה.
3) הוכחה כי אגף שמאל עונה על הבעיה.
← שני האגפים שווים.

←

31/12/13 תרגול

טענה: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

הוכחה אלגברית:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

הוכחה קומבינטורית: $\binom{n}{k}$ הוא מספר הדרכים לבחור תת קבוצה בגודל k מקבוצה בגודל n.

בחירה של קבוצה בגודל k שקולה לבחירת הנשארים.

⊛ בהוכחות קומבינטוריות משתמשים בתוכן.

טענה: $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!n!}=1$ יש דרך אחת לבחור את כל האיברים

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$$

טענה (פסקל):

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

הוכחה אלגברית:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right]=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left[\frac{n-k+1+k}{n-k+1}\right]$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{n+1}{n-k+1}\right)=\binom{n+1}{k}\ \square$$

הוכחה קומבינטורית: בהוכחות קומבינטוריות נבדק אחת ונראה שוויון

← בכמה דרכים ניתן לבחור תת-קבוצה בגודל k מקבוצה $\{1,2,3,\dots,n,n+1\}$?

← אגף שמאל - ברור (לפי הגדרה)

אגף ימין: ← יש שתי אפשרויות: האיבר הנוסף (n+1 במקרה שלנו) נמצא בתת הקבוצה או לא.

אם n+1 בתת-הקבוצה, אפשר להשלים את הבחירה ע"י בחירה של (k-1) איברים מ-$\{1\dots n\}$ ← $\binom{n}{k-1}$

אם n+1 לא בתת הקבוצה, אז נשלים ע"י בחירה של k איברים ←

$\binom{}{k-1}+\binom{}{k}$

← נזכור כי שתי הקבוצות שבחרנו הן בחירות זרות, הקבוצות זרות, לכן ניתן לחבר את הבחירות בלי לחשוש מחיתוך ביניהן.

הסידור הבא נקרא משולש פסקל:

$$\binom{0}{0}\,1$$

$$\binom{1}{0}\,1 \qquad \binom{1}{1}\,1$$

$$\binom{2}{0}\,1 \qquad \binom{2}{1}\,2 \qquad \binom{2}{2}\,1$$

$$\binom{3}{0}\,1 \qquad \binom{3}{1}\,3 \qquad \binom{3}{2}\,3 \qquad \binom{3}{3}\,1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

מבחינת זהות פסקל מובילה למשולש פסקל ומשמעותה: שכל איבר שווה לסכום שני האיברים שמעליו.

נסח את הבינום:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

הוכחה:

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ פעמים}}$$

מספר הפעמים בהם יופיע $\overbrace{a^k b^{n-k}}^{\text{המחובר}}$ הוא מספר הדרכים לבחור k גורמים שיתרמו a מתוך n הגורמים.

← האיברים של משולש פסקל יהיו המקדמים של הבינום.