

## תרגיל 7 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{א})$$

$$z \neq 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \quad (\text{ב})$$

$$|z| = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-z^n}{1+z^n} \quad (\text{ג})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3 - i)^n \quad (\text{ד})$$

2. מצאו את טור טיילור של הפונקציות הבאות:

$$z = 0 \quad \text{סביב } z^2 \sin z \quad (\text{א})$$

$$z = \frac{\pi}{2} \quad \text{סביב } z^2 \sin z \quad (\text{ב})$$

$$z = 0 \quad \text{סביב } \frac{z}{z^4+9} \quad (\text{ג})$$

3. יהי  $\sum a_n z^n$  טור המתכנס בתנאי. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור  $\sum a_n z^n$  הוא 1.

4. (א) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n$$

(ב) עבור הערכים בהם יש התכנסות, מצאו את סכום הטור.

5. מצאו את כל הפונקציות  $f(z)$  המקיימות את התנאים הבאים

$$(א) \quad f(z) \text{ שלמה.}$$

$$(ב) \quad \left| \frac{f(z)}{z^2} \right| \leq 1 \text{ עבור ערכי } z \text{ כך ש } |z| \geq 10.$$

$$(ג) \quad f(0) = 0, f'(0) = 0 \text{ ו } f''(0) = 1.$$

6. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות  $f\left(\frac{1}{n!}\right) + f''\left(\frac{1}{n!}\right) = 0$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

7. תהינה  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  מספר סופי של פונקציות אנליטיות ב  $A = \{z \mid |z| \leq 1\}$  ונתון כי לכל  $z \in A$

$$f_1(z) \cdots f_m(z) = 0$$

הוכיחו כי לפחות אחת מהפונקציות האלה היא פונקצית האפס.

8. מצאו את כל הפונקציות האנליטיות ב  $\{z \mid |z| < 2\}$  המקיימות ש  $f(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

9. נניח ש  $f(z)$  פונקציה שלמה כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים

$$|f(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n^n}$$

הוכיחו ש  $f(z) = 0$ . רמז: הוכיחו כי  $z = 0$  הוא אפס ומצאו את הסדר שלו.