

תרגיל בית מספר 5

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z) = \log(z^2 + 1)$ כאשר \log מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם.

2. חשבו את המספרים הבאים

$$\text{א. } z = (1+i)^i \quad \text{ב. } z = (-i)^{-i} \quad \text{ג. } z = \Re((1-i)^{1+i})$$

3. א. הוכיחו כי אם \log_1 ו- \log_2 הם שני ענפים של הלוגריתם ואם z הוא מספר הנמצא בתחום ההגדרה של שני ענפים אלו, אז קיים k שלם (התלוי ב- z) כך ש-

$$\log_2(z) = \log_1(z) + 2\pi ik.$$

ב. נניח ש- \log הוא ענף של הלוגריתם ו- z_1, z_2 הם שני מספרים מרוכבים כך ש- z_1, z_2 ו- $z_1 \cdot z_2$ נמצאים בתחום ההגדרה של ענף זה. האם בהכרח מתקיים

$$\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$$

4. חשבו $\int_{\gamma} \bar{z} e^{\bar{z}} dz$ כאשר γ היא המסילה המורכבת מהישרים מ- $z = i$ ל- $z = 0$ ומ- $z = 0$ ל- $z = 1$.

5. א. הוכיחו שהישר $x + y = 1$ נתון במרוכבים ע"י $\bar{z} = (1-i) + iz$.

ב. חשבו $\int_{\gamma} z^4 (\bar{z} + \sin(z)) dz$ כאשר המסילה γ היא המשולש בעל קודקודים בנקודות $z = 0, z = 1$ ו- $z = i$ המכוון נגד כיוון השעון.