פיתרון לתרגיל מספר 6

תשובה 1:

א. נמצא ע"ע וו"ע עבור המטריצה $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$: הפולינום האופייני של A הוא

$$f_A(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix}t-2 & -2\\ -1 & t-3\end{vmatrix}=(t-2)(t-3)-2=(t-1)(t-4)$$

לכן הע"ע הם 1 ו- 4. עבור הע"ע 1 המרחב העצמי הוא:

$$V_1=\left\{(x,y):\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}=\{(-2t,t):t\in\mathbb{R}\}=\{t\cdot(-2,1):t\in\mathbb{R}\}$$

ועבור הע"ע 4 המרחב העצמי הוא:

$$V_4=\left\{(x,y):\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}=\{(t,t):t\in\mathbb{R}\}=\{t\cdot(1,1):t\in\mathbb{R}$$

ב. ניקח את המטריצה $P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ שעמודותיה הן הווקטורים העצמיים של A. ואז נקבל ש $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=D$. נשים לב ש P היא מטריצת המעבר מבסיס הווקורים העצמיים לבסיס הסטנדרטי ו- P^{-1} היא מטריצת המעבר בכיוון ההפוך.

ג. נשים לב ש $A^6=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})=PD^6P^{-1}$ לכן

$$A^6=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^6\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^6 & 0\\ 0 & 4^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

ד. דרוש למצא מטריצה B כך ש $B^2=A$ דהיינו $B^2=PDP^{-1}$ לכן $P^{-1}B^2P=D$. נשים לב ש $P^{-1}B^2P=(P^{-1}BP)(P^{-1}BP)=(P^{-1}BP)^2$ לכן $(P^{-1}BP)^2=D$. עבור מטריצה אלכסונית $D=\begin{pmatrix}d_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & d_n\end{pmatrix}$ נסמן $\sqrt{D}=\begin{pmatrix}\pm\sqrt{\mathrm{d}_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \pm\sqrt{\mathrm{d}_\mathrm{n}}\end{pmatrix}$ אזי $\left(\sqrt{D}\right)^2=\mathrm{D}$.

שימו לב שישנן 2^n מטריצות $\sqrt{D}$ שיקיימו זאת (בחירות הסימן לפני השורשים) במקרה שלנו נבחר $\sqrt{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ ואז נדרוש $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ ומכאן

$$B=P\sqrt{D}\,P^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

<u>תשובה 2:</u>

ראשית ננסה ללכסן את A ו- B. הפולינומים האופייניים הם :

$$f_A(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-6 & 4 \\ -8 & t+6 \end{vmatrix} = t^2 - 4 = (t-2)(t+2)$$

$$f_B(t) = |tI - B| = \begin{vmatrix} t+5 & -12 \\ 2 & t-5 \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

לכן הע"ע של A הם $2,-2$ ושל B הם $1,-1$. נמצא מרחבים ווקטורים עצמיים:

$$V_2 = \left\{ (x,y) : \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot (1,1) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$V_{-2} = \left\{ (x,y) : \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{\left(\tfrac{1}{2}t, t\right) : t \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot (1,2) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$V_1 = \left\{ (x,y) : \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(2t,t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot (2,1) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$V_{-1} = \left\{ (x,y) : \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(3t,t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot (3,1) : t \in \mathbb{R}\}$$

נגדיר $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ עבור A ו- $Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ עבור B, כך ש

$$B = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \text{ו-} \quad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

לכן $$A^6 B^{2517} = P \begin{pmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & (-2)^6 \end{pmatrix} P^{-1} Q \begin{pmatrix} (1)^{2517} & 0 \\ 0 & (-1)^{2517} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

באשר $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>תשובה 3:</u>

תהי A מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ מעל שדה המרוכבים. מצאו ערכים עצמיים.

בכיתה ראינו שלאותה צורה של מטריצה אין תמיד ע"ע , איך הסתירה לכאורה מתיישבת?

$$P_A(t)=\begin{vmatrix} t-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & t-\cos\theta \end{vmatrix}=(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=t^2-2t\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=$$
$$=t^2-2t\cos\theta+1$$

$$t=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4(\cos^2\theta-1)}}{2}=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{-4(\sin^2\theta)}}{2}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

בכית תיארנו את המטריצה A כמטריצת סיבוב ממישור הממשי. כאן מדובר במטריצה הפועלת על

C^2 (המישור המרוכב) שאיזומורפי (כמרחב וקטורי) למישור ממשי 4 מימדי! אין כאן תיאור של סיבוב גיאומטרי!

<u>תשובה 4:</u>

המטריצה הסימטרית $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$ היא המטריצה המבוקשת

$$q(x,y)=3x^2-6xy+11y^2=(x,y)\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע :

$$f_A(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix} t-3 & 3 \\ 3 & t-11 \end{vmatrix}=t^2-14t+24=(t-12)(t-2)$$

לכן הע"ע הם 12 ו- 2. נמצא מרחבים עצמיים ווקטורים עצמיים מתאימים:

$$V_2=\left\{(x,y):\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=\{(3t,t):t\in\mathbb{R}\}=\{t\cdot(3,1):t\in\mathbb{R}\}$$

$$V_{12}=\left\{(x,y):\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=\left\{\left(-\frac{1}{3}t,t\right):t\in\mathbb{R}\right\}=\{t\cdot(-1,3):t\in\mathbb{R}\}$$

נגדיר $P=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ואז מתקיים ש $A=P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}P^{-1}=PDP^{-1}$ כאשר

$P^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{10}P^T$ לכן

$$(x,y)\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\big((x,y)P\big)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\left(P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\big((x,y)P\big)\begin{pmatrix} \frac{2}{10} & 0 \\ 0 & \frac{12}{10} \end{pmatrix}\left(P^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$=\big((x,y)P\big)\begin{pmatrix} \frac{2}{10} & 0 \\ 0 & \frac{12}{10} \end{pmatrix}\big((x,y)P\big)^T=(\tilde{x},\tilde{y})\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}(\tilde{x},\tilde{y})^T=\frac{1}{5}\tilde{x}^2+\frac{6}{5}\tilde{y}^2$$

כאשר $(3x+y, 3y-x) = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (x,y)P = (\tilde{x}, \tilde{y})$.