

תרגיל 5

1. תהי (X, τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית עליה. תזכורת: בתרגיל הקודם הוכחתם את סעיף (a).

(א) תהי $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה. הוכיחו שמתקיים אחד מהבאים:

i. $\{x_n\}$ לא מתכנסת.

ii. ל $\{x_n\}$ יש גבול יחיד.

iii. $\{x_n\}$ מתכנסת לכל איבר ב X .

(ב) יהי Y מרחב טופולוגי מטריזבילי, ותהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו ש f קבועה.

(ג) הוכיחו ש (X, τ_{cof}) אינו מטריזבילי. (הוכיחו שבעבור קבוצה סופית הטופולוגיה הקוסופית היא מטריזבילית)

2. הוכיחו שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

3. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A, B, C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B .

i. אם $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A \cup B$.

4. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z \subseteq Y \subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגיות תת מרחב על Z . הראו שזו בדיוק טופולוגיות תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

(ב) הוכיחו כי טופולוגיות תת מרחב של טופולוגיה קו-סופית היא בעצמה טופולוגיה קו-סופית.

5. תהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה, ויהי $A \subseteq X$. הוכיחו ש $f|_A : A \rightarrow Y$ רציפה.

6. יהי (X, τ) מ"ט. הוכיחו ש (X, τ) טריויאלי אמ"ם לכל $A \subseteq X$, $\emptyset \neq A$ צפופה ב X .

7. יהי X מרחב טופולוגי. תהינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו- $A \subseteq X$ קבוצה צפופה, כלומר $cl(A) = X$.

(א) הוכיחו: $U \subseteq cl(A \cap U)$.

(ב) הוכיחו: $cl(U) = cl(A \cap U)$.

8. יהי (X, τ) מ"ט ו- A, B תתי קבוצות. הוכיחו/ הפריכו: במקרה שאין שוויון, האם יש הכלה שנכונה תמיד?

(א) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

(ב) $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B)$

9. תרגילים מומלצים מהמרצה:

(א) הראו כי \mathbb{R}^n ספרבילי.

(ב) הוכיחו כי מרחב הסדרות l_2 ספרבילי.

(ג) חיתוך של שתי קבוצות צפופות ופתוחות הוא צפוף.

(ד) קבוצה A במרחב X דלילה אמ"ם $cl(A)$ דלילה ב- X .

(ה) אם A דלילה ב- X אז A^c צפופה ב- X .

(ו) מצאו דוגמה למרחב טופולוגי ואוסף בן מנייה של קבוצות דלילות שאיחודן לא דליל.