תרגיל 2 – אנליזה פונקציונלית

תרגיל 1

האם כל אחד מאוספי הקבוצות הבאות הינו אלגברה? האם סיגמא אלגברה? X הוא איבר היחידה ($\forall A \in \mathcal{F}\ A \subseteq X$) .

(א)

$$\mathcal{F} = \{E \subset \mathbb{N} | E \textit{ is finite or } E^c \textit{ is finite}\}\ X = \mathbb{N}$$

(ב)

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3,4\}\}\ X = \{1,2,3,4\}$$

(ג)

$$\mathcal{F} = \{\emptyset\} \cup \{A; [0, \frac{1}{2}] \subseteq A\}\ X = [0,1]$$

(ד)

$$\mathcal{F} = \{A; \forall x \in A, \forall q \in \mathbb{Q}\ q + x \in A\}\ X = \mathbb{R}$$

תרגיל 2

תהי $f : A \to B$ פונקציה כלשהי מקבוצה A לקבוצה B. עבור $B' \subseteq B$ נשתמש בסימון

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\},$$

כלומר $f^{-1}(B')$ היא קבוצת כל המקורות של B'.

א. הוכיחו שאם $B_1, B_2 \subseteq B$, אז

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$$

ב. בעזרת סעיף א' הוכיחו שאם R היא אלגברה אז הקבוצה $f^{-1}(R) = \{f^{-1}(B) : B \in R\}$ היא גם אלגברה.

תרגיל 3

1. Let E be a normed space and $X \subseteq E$. Recall that a function $f : X \to \mathbb{R}$ is *continuous* if for any sequence $x_n \to x$ in E we have $f(x_n) \to f(x)$. Prove that a function f is continuous if and only if for any $x \in E$ and any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$\forall\, y \in E,\ \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2. A function $f : X \to E$ is called *uniformly continuous* if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E,\ \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

It is clear that a uniformly continuous function is continuous.

3. (a) Let $K \subset E$ be a compact set and $f : K \to \mathbb{R}$ is a continuous function. Prove that f is uniformly continuous.

(b) Give an example of a continuous, but not uniformly continuous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4* (Bonus problem for extra credit). Consider the space $C[0, 1]$ of continuous functions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ with the norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)| = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|.$$

Prove that if $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for all $x \in [0, 1]$ and $\{f_n\}_{n\ge1}$ is a Cauchy sequence in $C[0, 1]$, then f is a continuous function.

Hint: use Exercise 3(a) and the Cauchy property to show that for any $\varepsilon > 0$ there exist $N \in \mathbb{N}$ and $\delta > 0$ such that

$$\forall\, n \ge N,\ \forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E,\ |x - y| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Then let $n \to \infty$.