ב"ש אנליזה 2 תשעז מועד ב

1. חשבו את:

(א) $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ccc} t=\sqrt{x} & \Rightarrow & t=\sqrt{x} \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x & & 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{array}\right\}=\int e^t\cdot 2t\mathrm{d}t$$

ונמשיך עם אינטגרציה בחלקים:

$$\int e^t\cdot 2t\mathrm{d}t=\left\{\begin{array}{cc} f=2t & f'=2 \\ g'=e^t & g=e^t \end{array}\right\}=2te^t-\int 2e^t\mathrm{d}t=2te^t-2e^t+C$$

ובסה"כ נקבל שהתשובה הסופית, לפי מונחי x המקוריים היא:

$$2te^t-2e^t+C=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$$

(ב) $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\mathrm{d}x&=\left\{\begin{array}{cc} f=\sin(x) & f'=\cos(x) \\ g'=\sin(x) & g=-\cos(x) \end{array}\right\}= \\ &=-\sin(x)\cos(x)-\int -\cos^2(x)\mathrm{d}x \\ &=-\sin(x)\cos(x)+\int \cos^2(x)\mathrm{d}x \\ &=-\sin(x)\cos(x)+\int 1-\sin^2(x)\mathrm{d}x \\ &=-\sin(x)\cos(x)+x-\int \sin^2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ואם נעביר אגף נקבל ש

$$2\int \sin^2(x)\mathrm{d}x=-\sin(x)\cos(x)+x+\text{קבוע}$$

ולכן

$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x=\frac{-\sin(x)\cos(x)+x}{2}+C$$

2.

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת באפס, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\{0\cdot \text{חסומה}\}=0$$

ולכן אין אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin(0)=0$$

ו

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\cos(0)=1$$

ולכן $y=1$ אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(0\right)=0$$

ו

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\cos(0)=1$$

ולכן $y=1$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\mathrm{d}x$.

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞ שהרי ב $x=1$ הפונקציה לא מתאפסת. למה? כי $\sqrt{x^2+1}-x$ מתאפסת אמ"מ $\sqrt{x^2+1}=x$ שזה גורר $x^2+1=x^2$ מה שלא ייתכן. כיוון ש $(\sqrt{0^2+1}-0=1>0)$ נקבל ש $\sqrt{x^2+1}-x$ חיובית תמיד. נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^\infty\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ שמתבדר ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר. הפונקציות $\sqrt{x^2+1}-x$ ו $\frac{1}{x}$ חיוביות בתחום $[1,\infty)$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x^2}^{0}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t}{x^2}\ .$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_{-x^2}^{0}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\frac{\sin(t)}{t}$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x^2}^{0}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin(-x^2)}{-x^2}\cdot(-2x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x^2)}{-x^2}=1$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k^2}{n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

ועבור $f(x)=x^2$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

.4

(א) קרבו את $\int_0^1 e^{\left(-2x^2\right)}\mathrm{d}x$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב $-2x^2$ במקום x, נקבל

$$e^{-2x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-2x^2\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n x^{2n}}{n!}$$

ולכן

$$\int_0^1 e^{-2x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n x^{2n}}{n!}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{n!}\int_0^1\left(x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{n!}\frac{1}{2n+1}$$

וכעת: $\frac{2^n}{n!}\geq\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ כי באופן שקול זה הטענה ש $n+1\geq 2$ שנכונה ולכן $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}\frac{1}{2n+1}$ הוא טור לייבניץ ומתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{n!}\frac{1}{2n+1}\right|\leq\left|\frac{(-1)^k\,2^k}{k!}\frac{1}{2k+1}\right|=\frac{2^k}{k!}\frac{1}{2k+1}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\int_0^1\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}\frac{1}{2n+1}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו

$\frac{2^k}{k!}\frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{100}$. עבור $k=6$ נקבל $\frac{1}{100} = \frac{4}{400} > \frac{4}{585} = \frac{1}{13} \cdot \frac{64}{720}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{6-1} \frac{(-1)^n\, 2^n}{n!} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} - \frac{2}{1!}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{2!}\cdot\frac{1}{5} - \frac{8}{3!}\cdot\frac{1}{7} + \frac{16}{4!}\cdot\frac{1}{9} - \frac{32}{5!}\cdot\frac{1}{11} = \frac{6161}{10395}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ כמבוקש.

(ב) חשבו את $f^{(47)}(0)$ עבור $f(x) = e^{\left(-2x^2\right)}$.

פתרון: ראינו בסעיף קודם כי

$$e^{-2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^n x^{2n}}{n!}$$

ולכן זהו פולינום טיילור שלו והמקדם של x^{47} בפולינום טיילור (סביב 0) הוא $\frac{f^{(47)}}{47!}$ ואילו אנחנו מצאנו שהמקדם הוא 0 (שהרי כל החזקות זוגיות) ולכן $f^{(47)}(0) = 0$.

5. תהא f פונקציה, כך שלכל $x \geq 0$ מתקיים $f''(x) > 0$.

(א) הוכיחו/הפריכו: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

פתרון: הפרכה: $f(x) = e^{-x}$ מקיימת כי $f'(x) = -e^{-x}$ ו $f''(x) = e^{-x}$ שתמיד חיוביות אבל

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \{e^{-\infty}\} = 0$$

(ב) נתון בנוסף כי $f'(0) = 1$. הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

פתרון: טענה1: לכל $x > 0$ מתקיים $f'(x) \geq 1$. הוכחה1: כיוון ש f'' חיובית נקבל ש f' עולה ולכן לכל $x > 0$ מתקים $f'(x) \geq f'(0) = 1$.

טענה2: יהא $x > 0$ אזי לפי משפט לגרנז, קיימת $0 < c < x$ כך ש

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c)$$

ומטענה 1 ש $f' \geq 1$ בתחום $[1, \infty)$ נקבל כי $\frac{f(x)-f(0)}{x} \geq 1$ ואם נכפיל ב x (שחיובי ולכן אי השיוון נשמר) נקבל ש $f(x) - f(0) \geq x$ ובהעברת אגף

$$f(x) \geq x + f(0)$$

וזה נכון לכל $x > 0$. כיוון ש

$$\lim_{x\to\infty} (x + f(0)) = \{\infty + f(0)\} = \infty$$

נקבל לפי חצי סנוויץ כי גם

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

כמו שרצינו.