פתרון מועד א' לינארית 2

(מגמת תשפ"ב)

שאלה 1: מההרצאה.

שאלה 2: (א) לא רואה צורך, כותבם כמעט הגדרתם יפה. היו לכם בדיוק תרגילים כאלה בש.ב ותרגול רק עם שם אחרים.

(ב) תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית כך שקיים $k\in\mathbb{N}$ המקיים $A^k=I$.

A סימטרית וממשית $\xLongrightarrow{\text{משפט}}$ לכסינה אוא"ג. כלומר קיימת P אוא"ג המקיימת

$$P^{-1}AP=D \quad \text{אלכסונית ולכן}$$

$$\Rightarrow A=PDP^{-1}$$

$$\Rightarrow A^k=\underbrace{(PD\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}DP^{-1})}_{k\text{ פעמים}}=PD^kP^{-1}$$

$$A^k=I \quad \text{נתון}$$

$$\Downarrow$$

$$PD^kP^{-1}=I$$

$\Downarrow$ נכפול ב-P^{-1} מימין, P משמאל

$D^k=I$.

D אלכסונית ולכן העלאה שלה בחזקה זה להעלות את כל איברי האלכסון בחזקה זו. כלומר אם נסמן

$$D=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

אז $D^k=\begin{pmatrix}\alpha_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^k\end{pmatrix}$ ולכן מכך ש $D^k=I$ נסיק ש α_i הם שורשי יחידה.

מנגד α_i הם ע"ע של A ונתון שהם ע"ע ממשיים כי לפי משפט יש לה רק ע"ע ממשיים (הרי היא סימטרית וממשית) $\Big\}$ $\alpha_i\in\{1,-1\}$ $\forall\, 1\le i\le n$

ולכן $D^2 = I$

$\Leftarrow \quad A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = P\underbrace{D^2}_{I}P^{-1} = I$

סוף

~~אשר~~

$AA^* \overset{A \text{ משפ׳}}{=} AA^t \underset{A \text{ סימטרית}}{=} AA = A^2 = I$

ולכן A אוני׳.

שאלה 3:

א) כן, נתון $T = T^2$ ולכן $T^2 - T = 0$

כלומר, T מאפסת את הפולינום $\lambda^2 - \lambda$

כך- $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$

כיוון שהפ״מ מחלק כל פולינום ש- A מאפסת אותו

$m_T \to \lambda$

$m_T \to \lambda - 1$

$m_T \to \lambda(\lambda - 1)$

ובין כה וכה מכיל שונים ולכן T לכסינה.

ב) נראה הכלה דו כיוונית:

$\subseteq$) $v \in ImT$: $\Leftarrow$ קיים $w \in V$ כך ש- $T(w) = v$

$(I-T)(v) = v - T(v) = v - T^2(w) \underset{T=T^2}{=} v - T(w) = v - v = 0$

ולכן $v \in ker(I-T)$

$\supseteq$) $v \in ker(I-T)$: אז $(I-T)(v) = 0$

$v - T(v) = 0$

$v = T(v) \Rightarrow v \in ImT$

v המקור של עצמו (כבר) יש לו מקור

ג) I לפי סעיף א ראינו את האפשרויות לע"ע וממילא הע"ע הם 1 או 0 (או שניהם) ולכן ממשיים.

כעת, נתון T נורמלית ולכן לכסינה אוניטרית. כלומר קיים בסיס אא"נ B ל-V כך ש-$[T]_B^B$ אלכסונית (עם הע"ע באלכסון)

הע"ע ממשיים והיא אלכסונית

$$([T]_B^B)^* = [T]_B^B$$

ולכן $[T]_B^B$ צ"ע.

B אא"נ ולכן לפי משפט T צ"ע

[T צ"ע $\iff$ המטריצה המייצגת לפי בסיס אא"נ צ"ע].

II

$$T(w)=w \iff T(w)-w=0$$
$$\iff w-T(w)=0 \iff (I-T)(w)=0$$
$$\iff w\in \underbrace{\ker(I-T)}_{\substack{\text{סעיף ב.}\\ = \\ ImT}}$$

$$W = ImT$$ נגדיר

ולכן לפי הנ"ל אכן מתקיים: $T(w)=w$ $\forall w\in W$

ולכן $W^\perp = (ImT)^\perp \underset{T\text{ צ"ע}}{=} (ImT^*)^\perp = \ker T$

ראיתם בעבר ההוכחה של שורה זו: לכל $u\in ImT^*$, $v\in \ker T$

$\langle v,u\rangle \underset{\text{קיים: } u=T^*(w) \text{ כי הוא בתמונה}}{=} \langle v, T^*(w)\rangle \underset{\text{הגדרת } T^*}{=} \langle T(v),w\rangle \underset{v\in\ker T}{=} \langle 0,w\rangle = 0$

ולכן $v\perp u$

ולכן גם התנאי השני מתקיים: $T(u)=0$ $\forall u\in W^\perp$

__שאלה 4:__ טכנית כמה שורות ורובם המוחלט עשיתם שעלה. ראיתם בדיוק בדברים כאלה רק עם מס' אחרים בתרגול.

__שאלה 5:__

__נכון__ (א) $|A|=0$ ולכן 0 ע"ע. [illegible]

בנוסף, $A\in \mathbb{R}^{2\times 2}$. ולכן פ"א מהצורה $\lambda(\lambda-\alpha)$.

-ט- $\alpha\neq 0$] שהרי: אחרת נקבל פ"א $=\lambda^2$ ולפי קה"ה $A^2=0$

בסתירה לנתון

$\Rightarrow$ פ"א $\lambda(\lambda-\alpha)$, $\alpha\neq 0$ כלומר __ע"ע שונים__ ולכן גם פ"מ שמתפרק אותו עם ע"ע שונים ולכן A לכסינה.

__לא נכון__ (ב) תהיינה $\langle,\rangle_1 , \langle,\rangle_2$ מ"פ שונות. נניח שקיים בסיס B שהוא א"נ לפי שתיהן.

כיוון שהמ"פ שונות אזי קיימים $v,u\in V$ כך ש- $\langle v,u\rangle_1\neq\langle v,u\rangle_2$

מצד שני, $\langle v,u\rangle_1 = [v]_B^t\, G_B\, \overline{[u]_B} = [v]_B^t\, \overline{[u]_B}$

נוסחה

לפי מ"פ 1 זו I שהרי B א"נ לפי $\langle,\rangle_1$

$\langle v,u\rangle_2 = [v]_B^t\, G_B\, \overline{[u]_B} = [v]_B^t\, \overline{[u]_B}$

מטריצת גראם לפי $\langle,\rangle_2$ אבל B א"נ גם לפי מ"פ זו ולכן גם פה נקבל I

__סתירה!__

__לא נכון__ (ג) נניח $A-(i+1)I$ לא הפיכה

אזי $|A-(i+1)I|=0$ ולכן $i+1$ ע"ע

__בסתירה__ לכך ש- A צל"ע ואז כל הע"ע שלה ממשיים!

Scanned with CamScanner

סעי׳ 4 נתון ע״פ התנאי

$$\|v+p\| = \|v-p\|$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\langle v+p, v+p\rangle} = \sqrt{\langle v-p, v-p\rangle} \quad / \, (\;)^2$$

לינאריות מ״פ $\Downarrow$

$$\cancel{\langle v,v\rangle} + \langle p, v\rangle + \langle v, p\rangle + \cancel{\langle p, p\rangle} = \cancel{\langle v,v\rangle} - \langle p, v\rangle - \langle v, p\rangle + \cancel{\langle p, p\rangle}$$

אנחנו ב-$\mathbb{R}$. $\langle p,v\rangle = \langle v, p\rangle$ $\Downarrow$

$$4\langle v, p\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\langle v, p\rangle = 0} \; (*)$$

כעת, ראינו בהרצאה ש- $v-p \in U^{\perp}$ ולכן בפרט מאונך ל-p ולכן

$$\langle v-p, p\rangle = 0$$

לינאריות מ״פ. $\Downarrow$

$$\langle v,p\rangle - \langle p, p\rangle = 0$$

$$\overset{*}{\Downarrow}$$

$$\langle p, p\rangle = 0 \xRightarrow{\text{ek}} p=0$$

ולכן $v \in U^{\perp}$ (כי כאמור $v-p\in U^{\perp}$ ובנוסף $p=0$).

■