תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

פתרון: במקרה שלנו

$$a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ברור כי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$$

ולכן

$$R=\frac{1}{1}=1$$

זה עוד לא אומר לנו בדיוק מה תחום ההתכנסות כי צריך לבדוק את השפה.
אם z מספר מרוכב כך ש $|z+i|=1$ אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$$

בוודאי מתכנס כי הוא מתכנס בהחלט שהרי

$$|\frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}|=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\leq\frac{1}{n^2}$$

ולכן לסיכום תחום ההתכנסות הוא $E=\{z\mid |z+i|\leq 1\}$.

(ב) $z\neq 1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}(\frac{z+1}{z-1})^n$

פתרון: נציב $w=\frac{z+1}{z-1}$ ונקבל את טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}w^n$$

נשים לב ש

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^n}}=\frac{1}{3}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות של הטור הוא

$$R=3$$

שוב צריך לבדוק את השפה אבל שוב ברור שאם $|w| = 3$ אז הטור מתכנס בהחלט כי

$$|\frac{1}{n^2 3^n} w^n| = \frac{1}{n^2}$$

ולכן תחום ההתכנסות של הטור הזה הוא

$$\{w \in \mathbb{C} | w| \leq 3\}$$

כדי למצוא את תחום ההתכנסות של הטור המקורי צריך לפתור את

$$|\frac{z+1}{z-1}| \leq 3$$

כלומר

$$|\frac{z+1}{z-1}|^2 \leq 9$$

נכתוב $z = x + iy$ ואז

$$\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \leq 9$$

כלומר

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2$$

$$8x^2 - 20x + 8 + 8y^2 \geq 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + y^2 \geq -1$$

$$(x - \frac{5}{4})^2 + y^2 \geq \frac{9}{16}$$

וקיבלנו שתחום ההתכנסות הוא המשלים של מעגל פתוח שרדיוסו $\frac{3}{4}$ ומרכזו ב $z = \frac{5}{4}$, מהמעגל הזה צריך להוציא את הנקודה $z = 1$ שמחוץ לתחום הגדרה בכלל.

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3 - i)^n$

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3 - i)^n$$

היות ש

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

במקרה זה רדיוס ההתכנסות הוא $R=0$ כלומר יש התכנסות רק עבור $w=0$.
זה מתאים לערכי z עבורם

$$z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

כלומר

$$z = e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i5\pi}{6}}, e^{\frac{i9\pi}{6}}$$

נשים לב שהפתרון האחרון הוא למעשה

$$e^{\frac{i3\pi}{2}} = -i$$

2. מצאו את טור טיילור של הפונקציות הבאות:

(א) $z^2 \sin z$ סביב $z=0$
פתרון: $z^2 \sin z$ סביב $z=0$. היות שידוע ש

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1`}}{(2n+1)!}$$

ברור שהטור שאנחנו מחפשים הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+3}}{(2n+1)!}$$

(ב) $z^2 \sin z$ סביב $z=\frac{\pi}{2}$
פתרון: נציב $w = z - \frac{\pi}{2}$ כדי שהפיתוח יהיה סביב 0. הפונקציה הופכת להיות

$$\begin{aligned}(w+\frac{\pi}{2})^2 \sin(w+\frac{\pi}{2}) &= (w+\frac{\pi}{2})^2 \cos(w) \\ &= w^2\cos(w) + \pi w \cos w + \frac{\pi^2}{4}\cos w\end{aligned}$$

היות שהפיתוח של $\cos w$ הוא

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

נקבל שהטור המבוקש הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+2}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi \frac{w^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi \frac{w^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר הטור הוא

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

כאשר

$$a_k = \begin{cases} \frac{\pi(-1)^n}{(2n)!} & k = 2n+1 \\ (-1)^n(\frac{\pi^2}{4(2n)!} - \frac{1}{(2n-2)!}) & k = 2n \quad k \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{4} & k = 0 \end{cases}$$

(ג) $\frac{z}{z^4+9}$ סביב $z = 0$

פתרון: נשים לב ש

$$\frac{1}{9+z^4} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-(-(\frac{z}{\sqrt{3}})^4)} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z}{\sqrt{3}}^4)^n = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^n}z^{4n}$$

ולכן הטור שלנו הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9(\sqrt{3})^n}z^{4n+1}$$

(ד) $\frac{z}{(z+2)(z+3)}$ סביב $z = 1$.

פתרון: נפרק לפי שברים חלקיים. קל לראות ש

$$\frac{z}{(z+2)(z+3)} = \frac{-2}{z+2} + \frac{3}{z+3}$$

כעת,

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{z}{3})} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}$$

בדומה

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}$$

ולכן

$$\frac{-2}{z+2}+\frac{3}{z+3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n})z^n$$

3. יהי $\sum a_n$ טור המתכנס בתנאי. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum a_n z^n$ הוא 1.

פתרון: נסמן את רדיוס ההתכנסות ב R. היות ש $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אנחנו יודעים ש $\sum a_n z^n$ מתכנס עבור $z = 1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא לפחות 1. מצד שני רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum |a_n| z^n$ הוא גם R והטור הזה דווקא מתבדר עבור $z = 1$ כלומר $R \leq 1$ ולכן לסיכום $R = 1$.

4. פתחו לטור טיילור סביב 0 את הפונקציה

$$f(z) = \int_0^z e^{w^2} \mathrm{d}w$$

פתרון: הפיתוח של e^{w^2} לטור טיילור הוא כמובן

$$e^{w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{n!}$$

ולכן לפי אינטגרציה איבר איבר

$$\begin{aligned}\int_0^z e^{w^2} \mathrm{d}w &= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{n!} \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \frac{w^{2n}}{n!} \mathrm{d}w \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right|_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}\end{aligned}$$

וזהו.

5. מצאו את המקסימום (איפה הוא מתקבל ומה הערך שלו) הגלובאלי של $\sin z$ במלבן $0 \leq x \leq \pi$ ו $0 \leq y \leq 1$

לפי עקרון המקסימום. המקסימום חייב להתקבל על השפה של התחום. במקרה שלנו השפה היא מלבן. נחפש נקודות חשודות על 4 הצלעות באמצעות כלים של אינפי ואז נשווה אותן כדי למצוא את המקסימום.

- על הקו בין 0 ל π מקבלים ערכים רגילים של $\sin$ ממשי ולכן המקסימום מתקבל ב $z = \frac{\pi}{2}$.
- על הקו בין 0 ל i ערך הפונקציה הוא

$$\sin(iy) = i \sinh(y)$$

בערך מוחלט זה שווה ל

$$\sinh(y)$$

כידוע $\sinh$ היא פונקציה מונוטונית עולה ולכן המקסימום על קו זה מתקבל ב $y = 1$ והוא

$$\sinh(1)$$

- על הקו בין π ל $i+\pi$ הפונקציה היא

$$\sin(\pi+iy)=-i\sinh(y)$$

שוב המקסימום יתקבל בקצה $z=\pi+i$ וערכו הוא

$$\sinh(1)$$

- על הקו בין i ל $i+\pi$ הפונקציה היא

$$\sin(x+i)=\sin x\cosh(1)+i\cos x\sinh(1)$$

כלומר אנחנו מחפשים מקסימום לפונקציה

$$\sin^2 x\cosh^2(1)+\cos^2 x\sinh^2(1)=\sinh^2(1)+\sin^2 x(\cosh^2(1)-\sinh^2(1))$$

נגזור ונקבל שהנקדות החשודות הן במקומות ש

$$2\sin x\cos x=0$$

כלומר ב $z=i,i+\frac{\pi}{2},i+\pi$

לסיכום: קיבלנו בסך הכל 4 נקודות חשודות

$$\{\frac{\pi}{2},i,i+\frac{\pi}{2},i+\pi\}$$

הערכים של $|\sin z|$ בנקודות אלה (לפי הסדר) הם:

$$1,\sinh(1),\cosh(1),\sinh(1)$$

הגדול מכולם הוא

$$\cosh(1)=\frac{e^1+e^{-1}}{2}$$

והוא מתקבל כאמור בנקודה $z=i+\frac{\pi}{2}$ שהיא המקסימום הגלובאלי היחיד.