88-113-תרגיל 4:

1. עבור המט' הבאות מצא: ע"ע,ו-ו"ע , במידה וA לכסינה, מצא: מט' מלכסנת P ומט' אלכסונית D וכמו כן את: A^{-1}, A^{3} ע"י שימוש בפרוק $A = PDP^{-1}$.

(רמז לחזקות: לאחר שמצאתם את הפרוק היזכרו שבעצם A^n הוא מכפלת A n פעמים (מה קורה ל P ?). השתמשו בחישוב חזקתה של מטריצה אלכסונית שהיא פשוטה מאוד...)

א. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = -1,-2 \Rightarrow \text{לכסינה} - A$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}P^{-1}, A^3 = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}P^{-1}$$

ב. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

A איננה לכסינה

ע"מ 84 תר' 2.7:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

א. לכסן את A (כלומר מצא את הפרוק הנדרש ל D אלכסונית ו P מלכסנת)

$$\lambda_{1,2}=2,\ \ \lambda_3=6$$

$$V_{\lambda_{1,2}}=sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\ \ V_{\lambda_3}=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

שימו לב לרשום את הו"ע ב P באותו סדר שהנחנו את הע"ע ב D, ואת אלו להניח בסדר ריבוי יורד

ב. חשב את A^n

$$A^n=\left(PDP^{-1}\right)^n=\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\ldots\left(PDP^{-1}\right)=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

2.10 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&a^2\\1&4&0\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times3}$. מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה A לכסינה.

$$\left|\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x & -a^2 \\ -1 & -4 & x \end{pmatrix}\right| = (x-2)\left(x^2-4a^2\right) = (x-2)(x-2a)(x+2a)$$

אם שלושת הע"ע שונים אז כפי שהוכחנו בכיתה A וודאי לכסינה, לכן כבר בשלב זה ניתן לומר שעבור $a \neq 1,-1,0$ A לכסינה.נראה מה קורה כשהיא כן שווה לאחד מהם:

$a=1$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2,3}=2,-2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \mid 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \mid 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b=0.5c, a=2b-c=c-c=0 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \mid 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \mid 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=0, b=-0.5c \Rightarrow v_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לא לכסינה

$a=-1$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן גם לא לכסינה

$a=0$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&0\\1&4&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2}=2,0$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-2&0&|0\\1&4&-2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-2&0&|0\\0&6&-2&0\end{pmatrix}\Rightarrow b=\frac{1}{3}c,a=2b=\frac{2}{3}c\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&0&0|&0\\1&4&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&0|&0\\1&4&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=0,b=0\Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

לכן גם לא לכסינה

3.9 תרגיל. א. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. הוכח: $f_A(x)=f_B(x)$ (במלים: למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני).

ב. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, כך שאחת מהן לפחות הפיכה. הוכח: $f_{AB}(x)=f_{BA}(x)$. [רמז: (א)]

$$B=P^{-1}AP$$

$$f_B(\lambda)=|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP|=|P^{-1}\lambda P-P^{-1}AP|=$$
$$|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||(\lambda I-A)||P|=|(\lambda I-A)|=f_A(\lambda)$$

בה"כ נניח A הפיכה,אזי:

$$BA=A^{-1}ABA=A^{-1}(AB)A\Rightarrow BA\approx AB\Rightarrow f_{AB}=f_{BA}$$

ע"מ 87 תר' 3.13:

א. $A \in Mat_n(F)$ לכסינה. הוכח שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים ומצא גורמים אלו (רמז: למטריצות דומות אותו פולינום אופייני)

ב. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. הוכח ש A איננה לכסינה. האם זה סותר את א?

A לכסינה$\Leftarrow$ A דומה למטריצה אלכסונית שערכיה העצמיים באלכסונה

הוכחנו בשעורים קודמים כי למטריצות דומות אותו פולינום אופייני ולכן הפולינום של A

יהיה זהה לזה של המטריצה האלכסונית אשר הוא מהצורה $\prod(\lambda-\lambda_i)$ עבור כל λ_i איבר על אלכסונה.

ב. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. הוכח ש A איננה לכסינה. האם זה סותר את א?

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$$

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = t, x_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר אין מספיק ו"ע לליכסון A. לא סותר כיוון שכיוון הגרירה הפוך

3.15 תרגיל. זוכרים את דני? עכשיו הוא חושב שיש לו הוכחה פשוטה למשפט קיילי–המילטון: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. לפי ההגדרה, $f_A(x)=|A-xI|$, לכן $f_A(A)=|A-AI|=|A-A|=|O|=0$. מ.ש.ל. אבל דני בחור פיקח: הוא יודע ש $f_A(A)$ צריכה להיות מטריצה, והוא קיבל סקלר! מה לא נכון בהוכחה של דני? [רמז: כיצד נראית המטריצה xI? האם אפשר להציב A במקום ה x–ים שבמטריצה זו?]

הטעות נובעת מהתייחסות למט' הסקלרית xI ככפל בין מטריצות. למעשה בהצבת A במקום x היא אמורה להופיע בכל רכיב באלכסון וליצור מטריצת בלוקים אלכסונית.

.3

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

האם היא ניתנת לשילוש? אם כן מצא את המשולשית לה היא דומה

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$