פתרון תרגיל 9 בפונקציות מרוכבות

1. נשתמש במשפט השאריות

(א) נזכור ש

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ולכן

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{z^2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}$$

$$\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n+3}$$

הסינגולריות היחידה היא 0 והשארית בה מתקבלת כאשר $n = 2$ כלומר

$$\mathrm{Res}(\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}, 0) = \frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} \mathrm{d}z = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$$

(ב) נזכור ש

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \ldots + \frac{1}{z} + 1$$

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-2n-1}}{(2n+1)!} = \ldots - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{z}$$

אנחנו מעוניינים בשארית של המכפלה

$$e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} = (\ldots + \frac{1}{z} + 1)(\ldots - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{z})$$

קל לראות שהמקדם של $\frac{1}{z}$ במכפלה מתקבל רק מהכפל של שני האיברים הימניים בביטויים האלה,כי כל השאר יתנו חזקות גדולות מדי. ולכן

$$\int\limits_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i \,\mathrm{Res}(e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}, 0) = 2\pi i$$

(ג) בתוך התחום יש סינגולאריות אחת שהיא $z = 1$ וזהו כמובן קוטב מסדר 6.
נשתמש בנוסחא

$$\mathrm{Res}(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}, 1) = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}(\frac{z^6}{(z-3)})$$

נבצע חישוב לפי לייבניץ

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}\frac{z^6}{(z-3)} &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}((z-3)^{-1})\frac{\mathrm{d}^{5-k}}{\mathrm{d}z^{5-k}}(z^6) = \\ &= (z-3)^{-1}720z + 5\cdot(-(z-3)^{-2})\cdot 360z^2 + 10\cdot 2(z-3)^{-3}\cdot 120z^3 \\ &+ 10\cdot(-6(z-3)^{-4})\cdot 30z^4 + 5\cdot 24(z-3)^{-5}\cdot 6z^5 - 120(z-3)^{-6}\cdot z^6\end{aligned}$$

נציב $z = 1$ ונקבל:

$$-\frac{720}{2} - \frac{5\cdot 360}{4} - \frac{20\cdot 120}{8} - \frac{60\cdot 30}{16} - \frac{30\cdot 24}{32} - \frac{120}{64}$$

ולכן

$$\mathrm{Res}(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}, 1) = \frac{1}{5!}(-\frac{720}{2} - \frac{5\cdot 360}{4} - \frac{20\cdot 120}{8} - \frac{60\cdot 30}{16} - \frac{30\cdot 24}{32} - \frac{120}{64}) = -\frac{665}{64}$$

ולכן

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{-665}{64} = -\pi i\frac{665}{32}$$

(ד) בתוך התחום יש כמה סינגולאריות. $z = 0$, $z = \pm\pi$. שאר הסינגולריות כבר
מחוץ לתחום. כל הסינגולריות הן קטבים מסדר 1 (כי הן אפסים מסדר 1 של
$\sin z$).

$$\mathrm{Res}(\frac{1+z}{\sin z}, 0) = \frac{1+0}{\cos 0} = 1$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1+z}{\sin z}, \pi) = \frac{1+\pi}{\cos\pi} = -1-\pi$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1+z}{\sin z}, -\pi) = \frac{1-\pi}{\cos -\pi} = -1+\pi$$

ולכן סכום הסינגולאריות הוא -1 ולכן

$$\int\limits_{\gamma}\frac{1+z}{\sin z}\mathrm{d}z = -2\pi i$$

.2

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3-\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

נציב $t = 2\theta$ ולכן $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{3-\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{4\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t$$

קל לראות ש

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t$$

(מי שמתעקש יכול להוכיח זאת ע"י הצבה של $\varphi = t - 2\pi$) ולכן

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t$$

עכשיו נבצע הצבה מרוכבת

$$\begin{aligned} z &= e^{it} \\ \mathrm{d}z &= ie^{it}\mathrm{d}t = iz\mathrm{d}t \\ \cos t &= \frac{z+\bar{z}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{2}{3-(\frac{z+\bar{z}}{2})}\frac{1}{iz}\mathrm{d}z &= \int_{|z|=1} \frac{4}{6-z-\bar{z}}\frac{1}{iz}\mathrm{d}z = 4i\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2-6z+1}\mathrm{d}z \\ &= 4i\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-(3-\sqrt{8}))(z-(3+\sqrt{8}))}\mathrm{d}z \end{aligned}$$

נשים לב ש $3-\sqrt{8}$ היא סינגולריות בתוך התחום ו $3+\sqrt{8}$ מחוצה לו. קל לראות ש

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{(z-(3-\sqrt{8}))(z-(3+\sqrt{8}))}, 3-\sqrt{8}) = \frac{1}{3-\sqrt{8}-3-\sqrt{8}} = -\frac{1}{2\sqrt{8}}$$

ולכן לפי משפט השאריות

$$4i\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-(3-\sqrt{8}))(z-(3+\sqrt{8}))}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot 4i\cdot(-\frac{1}{2\sqrt{8}}) = \sqrt{2}\pi$$

כנדרש.

3. בכל השאלה הזאת נסמן $\Gamma_R = \{z \mid z \in \mathbb{R} \quad -R \le z \le R\} \cup \{z \mid \mathrm{Im}(z) \ge 0 \quad |z| = 1\}$ מסילה המכוונת עם כיוון השעון, ו $\Delta_R = \{z \mid \mathrm{Im}(z) \ge 0 \quad |z| = 1\}$ כנ"ל. לכן ברור שלכל פונקציה $f(z)$

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Delta_R} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z$$

(א) ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (לפי השוואה עם $\frac{1}{x^2}$) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x$$

נגדיר

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-2z+5)^2} = \frac{1}{(z-(1+2i))^2(z-(1-2i))^2}$$

לכן אם R מספיק גדול (נניח $R > 5$) אז כל הסינגולריות שיש לפונקציה בחצי המישור העליון (במקרה הזה, $1+2i$) נמצאים כבר בתוך Γ_R ולכן לפי משפט השאריות

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-(1+2i))^2(z-(1-2i))^2}\mathrm{d}z = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), 1+2i)$$

כמובן ש $1+2i$ הוא קוטב מסדר 2 ולכן אם נסמן

$$g(z) = \frac{1}{(z-(1-2i))^2}$$

השארית היא

$$\mathrm{Res}(f(z), 1+2i) = \lim_{z\to 1+2i} g'(z) = \lim_{z\to 1+2i} \frac{-2}{(z-(1-2i))^3} = \frac{-2}{-64i} = -\frac{i}{32}$$

ולכן

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{-i}{32} = \frac{\pi}{16}$$

לכל $R > 5$. כעת נעבור לאינטגרל

$$\int\limits_{\Delta_R} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Delta_R} \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\mathrm{d}z$$

נוכיח שכאשר $R \to \infty$ האינטגרל שואף ל 0. נתחיל ממה שהוא די ברור, ש $f(z)$ מתנהג בערך כמו $\frac{1}{R^4}$ וליתר דיוק:

נשים לב ש

$$|z^2-2z+5| \ge ||z|^2 - |-2z+5|| = |R^2 - |-2z+5||$$

אבל

$$|-2z+5| \leq 2|z|+5 = 2R+5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים

$$R^2 \geq 2R+5 \geq |-2z+5|$$

נקבל ש

$$|z^2-2z+5| \geq |R^2-|-2z+5|| = R^2-|-2z+5| \geq R^2-2R-5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (שבהם בפרט R^2-2R-5 חיובי)

$$|f(z)| = |\frac{1}{(z^2-2z+5)^2}| \leq \frac{1}{(R^2-2R-5)^2}$$

נזכור שהאורך של Δ_R הוא πR ולכן לפי משפט על חסם ML מתקיים ש

$$|\int_{\Delta_R} \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\mathrm{d}z| \leq \frac{\pi R}{(R^2-2R-5)^2} \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

ולכן אם נזור לשוייון

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Delta_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z$$

ונפעיל $\lim_{R\to\infty}$ נקבל ש

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{16}$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}$$

(ב) נשתמש בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (נניח, לפי מבחן דירכלה כי קל לבדוק ש $\frac{x}{x^2-2x+2}$ מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x\cos x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$$

נגדיר

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2}$$

ואז עבור $z \in \mathbb{R}$ מתקיים ש

$$\frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} = \operatorname{Re} f(z)$$

כלומר

$$\int_{-R}^{R} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \operatorname{Re} f(z) \mathrm{d}z = \operatorname{Re} \int_{-R}^{R} f(z) \mathrm{d}z$$

(השיוון האחרון נכון כי האינטגרל על תחום ממשי) כלומר הערך המבוקש הוא

$$\operatorname{Re} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2} \mathrm{d}z$$

את זה נחשב בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב ש

$$z^2 - 2z + 2 = (z - (1 + i))(z - (1 - i))$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (כך ש $1 + i$ נמצא בתוך Γ_R) אנחנו יודעים לפי משפט השאריות ש

$$\int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2} \mathrm{d}z = \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(z - (1 + i))(z - (1 - i))} \mathrm{d}z = 2\pi i \frac{(1 + i)e^{i-1}}{2i} = \pi(1+i)e^{i-1}$$

כעת לפי משפט ז'ורדן

$$|\int_{\Delta_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2} \mathrm{d}z| \leq \pi \max_{z\in\Delta_R} \frac{z}{z^2 - 2z + 2}$$

וכמו קודם בגלל ש $|\frac{z}{z^2-2z+2}|$ הוא בערך $\frac{1}{R}$ נקבל שכאשר R שואף ל ∞ גם האינטגרל שלנו שואף ל 0. ולכן

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} \mathrm{d}x = \operatorname{Re} \pi(1 + i)e^{i-1} = \frac{\pi}{e} \operatorname{Re}((1 + i)e^{i})$$

$$= \frac{\pi}{e}(\cos 1 - \sin 1)$$

(ג) ראשית נשים לב שהפונקציה המדוברת זוגית ולכן

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

והאינטגרל בבירור מתכנס ולכן נחשב את

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

בשיטה הרגילה

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\mathrm{d}z$$

אם נסמן

$$g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$$

אז נקבל

$$g'(z) = \frac{-2}{(z+i)^3}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i g'(i) = 2\pi i\frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-4\pi i}{-8i} = \frac{\pi}{2}$$

שוב קל לוודא ש

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Delta_R} \frac{1}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z = 0$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

בעוד שאת

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

נחשב עם הפונקציה

$$f(z)=\frac{e^{2iz}}{(1+z^2)^2}=\frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

כרגיל נגדיר

$$g(z)=\frac{e^{2iz}}{(z+i)^2}$$

ואז

$$g'(z)=\frac{2ie^{2iz}(z+i)^2-2(z+i)e^{2iz}}{(z+i)^4}$$

ולכן

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\mathrm{d}z=2\pi i g'(i)=2\pi i\frac{2ie^{-2}(-4)-4ie^{-2}}{16}=e^{-2}\frac{16\pi+8\pi}{16}=\frac{3\pi}{2e^2}$$

כמו כן אם $|z|=R$ אז עבור ערכי R מספיק גדולים

$$|z^2+1|\geq|z|^2-1=R^2-1$$

ולכן

$$|\frac{1}{(z^2+1)^2}|\leq\frac{1}{(R^2-1)^2}$$

ואז לפי הלמה של ז'ורדן מתקיים ש

$$|\int\limits_{\Delta_R}\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z|\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{(R^2-1)^2}$$

ולכן זה מתכנס ל 0 כאשר R שואף לאינסוף. לסיכום

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{3\pi}{2e^2}$$

ו

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2e^2})=\frac{\pi}{8}(1+\frac{3}{e^2})$$