

מרצה: דר' ארז שיינר מרצה מלווה: דר' אריאל ויצמן מתרגלים: גב' יולי שקד, גב' חנה שפירא, מר יואב יוסיף

אור, גב' ירדן נחמה אביעד, מר ישי פריש, גב' דנה מרקיוויץ

משך הבחינה: שלוש שעות משקל כל שאלה: 22 נק' חומר עזר: נוסחאון מצורף, מחשבון מותר

1. מצאו פתרון למד"ר $xy' = x + y$ המקיים $y(e) = 0$.

2. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{1}{3} - \frac{(x+y)^2}{e^x}$ המקיים $y(0) = 1$.

3. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 4y = e^{2x}$ המקיים: $y(0) = y'(0) = 0$.

4. מסה בגודל 1kg מחוברת לקפיץ על שולחן ללא חיכוך, המסה לא נעה והקפיץ רפוי.

בזמן $t = 0$ האפי החתול ($\omega \cdot \hat{e} \geq \omega \cdot \hat{e}$) נתן מכה למסה, והיא התחילה לזוז במהירות 2 מטר לשנייה.

לאחר 3 שניות המסה חזרה בפעם הראשונה לנקודה בה היא הייתה בזמן $t = 0$.

מצאו את המרחק בין מיקום המסה בזמן $t = 2$ לבין המיקום שלה בזמן $t = 0$. אפשר לתת תשובה בדיוק

של 3 ספרות עשרוניות.

גרסא באנגלית של שאלה 4:

A 1 kg mass is attached to a spring on a frictionless table. Initially, the mass is at rest and the spring is unstretched.

At $t = 0$, Happy the cat ($\hat{e} \cdot \omega \geq \hat{e} \cdot \omega$) struck the mass, causing it to start moving at a speed of 2 meters per second.

After 3 seconds, the mass returned for the first time to the position it occupied at $t = 0$.

Find the distance between the position of the mass at $t = 2$ and its position at $t = 0$. You may give your answer correct to three decimal places.

5. נתון ריבוע. נניח כי שטח הריבוע גדל בקצב הפרופורציונלי לאורך הצלע שלו, כאשר אורך הצלע נמדד

במטרים, והזמן בשניות.

נתון בנוסף כי בזמן $t = 0$ שטח הריבוע הוא 4 מ"ר, ובזמן $t = 1$ היקפו הוא 12 מטר.

חשבו את אורך צלע הריבוע בזמן $t = 2$.

גרסא באנגלית של שאלה 5:

Consider a square. Suppose that its area increases at a rate proportional to its side length, where the side length is measured in meters and time is measured in seconds.

It is also given that at $t = 0$, the area of the square is 4 m^2 , and at $t = 1$, its perimeter is 12 meters.

Calculate the side length of the square at $t = 2$.

נוסחאון מד"ר

חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:

כתיב דיפרנציאלי – את המד"ר $y' = f(x, y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x, y)dx$

מד"ר פרידה – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$ כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

מד"ר הומוגנית – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z} dz = \ln|x| + C$. נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$.

ניתן להציג את $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ כ- $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. במקרה זה $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

מד"ר לינארית מסדר ראשון – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחא

$$y = e^{-A(x)} \left(C + \int b(x)e^{A(x)} dx \right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

משוואת ברנולי – יהי $n \neq 0, 1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.

נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.

נמצא את z ונחליף את y .

מד"ר מדוייקת – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x, y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.

שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.
2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F = \int Pdx + c(y)$.
3. נגזור ונשווה למקדם השני $Q = \frac{\partial}{\partial y} (\int Pdx + c(y))$, וכך נמצא את $c(y)$.
4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x, y) = C$.

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, נחפש גורם אינטגרציה μ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדויקת.

שלבי התהליך:

1.

א. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ אינו תלוי ב- y ,

במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$.

ב. יש גורם אינטגרציה $\mu(y)$ אם הביטוי $\frac{Q_x - P_y}{P}$ אינו תלוי ב- x ,

במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$.

2. נכפול בגורם האינטגרציה, ונודא שקיבלנו מד"ר מדויקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).

3. נפתור את המד"ר המדויקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y' = f(x, y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.

המשוואה האינטגרלית – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$.

משפט הקיום והיחידות – תהי $f(x, y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$.

נסמן ב- M את החסם של $|f(x, y)|$ בתחום, ונסמן $a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

אזי קיים פתרון יחיד y לבעיית הקושי $y' = f(x, y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ בתחום $|x - x_0| \leq a'$.

חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1. $y(t)$ מיקום

2. $v(t) = y'(t)$ מהירות

3. $a(t) = y''(t)$ תאוצה

החוק השני של ניוטון – $F = ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף.

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g \approx 9.82 \text{ m/sec}^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם y הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.

הורדת סדר למד"ר מסדר שני ללא המשתנה – עבור מד"ר מהצורה $y'' = f(y, y')$

1. נחפש פונקציה $p(y)$ עבורה $p'p = f(y, p)$.

2. נחפש פונקציה y המקיימת $y' = p(y)$.

מד"ר לינארית – מד"ר מהצורה $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ נקראת מד"ר לינארית מסדר n .

אם $b(x) = 0$ המד"ר נקראת הומוגנית.

בעיית קושי למד"ר לינארית – מציאת פונקציה המקיימת את המד"ר הלינארית מסדר n ואת תנאי ההתחלה

$$y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

משפט קיום ויחידות – אם המקדמים $a_i(x), b(x)$ רציפים בקטע I אזי קיים פתרון יחיד בקטע I המקיים את בעיית הקושי.

מרחב הפתרונות – מרחב הפתרונות למד"ר הלינארית ההומוגנית מסדר n עם מקדמים רציפים הוא ממימד n .

פתרון כללי למד"ר לינארית – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים, יהיו $y_0, \dots, y_{n-1}$ בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית ויהי y_p פתרון פרטי למד"ר האי הומוגנית. אזי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y = y_p + c_0 y_0 + \dots + c_{n-1} y_{n-1}$$

הורונסקיאן – עבור הפונקציות $y_1, \dots, y_n$ נגדיר את הורונסקיאן

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

תלות לינארית של פתרונות – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I , ויהיו $y_1, \dots, y_n$ פתרונות למד"ר.

אזי הפתרונות ת"ל אם ורק אם הורונסקיאן מתאפס בכל הקטע I .

מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים – הפולינום האופייני של המד"ר $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ הוא

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

אם $\lambda \in \mathbb{R}$ שורש ממשי של הפולינום האופייני מריבוי k , אזי הוא תורם את הפתרונות

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

למד"ר ההומוגנית.

אם $\lambda = a \pm bi \in \mathbb{C}$ זוג שורשים מרוכבים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד, אזי הם תורמים את הפתרונות

$$e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx), xe^{ax} \cos(bx), xe^{ax} \sin(bx), \dots, x^{k-1}e^{ax} \cos(bx), x^{k-1}e^{ax} \sin(bx)$$

למד"ר ההומוגנית.

שיטת הניחוש עבור מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים – עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax}$$

כאשר a שורש של הפולינום האופייני מריבוי k ננחש פתרון פרטי

$$y_p = x^k(d_0 + d_1x + \dots + d_mx^m)e^{ax}$$

עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax} \cos(bx)$$

או המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax} \sin(bx)$$

כאשר $a \pm bi$ שורשים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד ננחש פתרון פרטי:

$$y_p = x^k(d_0 + d_1x + \dots + d_mx^m)e^{ax} \cos(bx) + x^k(t_0 + t_1x + \dots + t_mx^m)e^{ax} \sin(bx)$$

שיטת וריאצית המקדמים בעזרת כלל קרמר למציאת פתרון פרטי – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים

בקטע I :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

יהיו $y_0, \dots, y_{n-1}$ פתרונות המהווים בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית. אזי הפונקציה

$$y_p = c_0(x)y_0(x) + \dots + c_{n-1}(x)y_{n-1}(x)$$

מהווה פתרון פרטי למד"ר אם לכל i מתקיים כי

$$c'_i(x) = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{n-1} \\ y_0' & y_1' & \dots & y_{n-1}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_0^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

וכן A_i היא המטריצה המתקבלת מ A ע"י החלפת העמודה ה $i + 1$ בעמודה $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

טורי טיילור –

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

מערכת מד"ר – עבור מערכת מד"ר מהצורה $\vec{y}^{(n)} = A\vec{y}$, כאשר v_1 ו"ע עם λ_1 מתאים של המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ננחש פתרון $\vec{y} = f \cdot v_1$, ונקבל כי הוא אכן פתרון אם $f^{(n)} = \lambda_1 f$.

משוואת אוילר – משוואת אוילר הומוגנית היא משוואה לינארית מהצורה

$$a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

על מנת למצוא את הפתרונות של משוואת אוילר הומוגנית נבצע את השלבים הבאים:

1. נציב $y = x^r$ במשוואה, נצמצם את x^r ונקבל את המשוואה האינדנציאלית.
2. אם $r \in \mathbb{R}$ שורש מריבוי k של המשוואה האינדנציאלית, נקבל את הפתרונות $x^r, \ln(x) x^r, \dots, (\ln(x))^{k-1} x^r$
3. אם $a \pm bi \in \mathbb{C}$ שורשים מריבוי k כל אחד של המשוואה האינדנציאלית נקבל את הפתרונות $x^a \cos(b \ln(x)), x^a \sin(b \ln(x)), \ln(x) x^a \cos(b \ln(x)), \ln(x) x^a \sin(b \ln(x)), \dots, (\ln(x))^{k-1} x^a \cos(b \ln(x)), (\ln(x))^{k-1} x^a \sin(b \ln(x))$

תגובה להלם עם קונבולוציה

$$y'' + by' + cy = f(x)$$

תהי תגובה להלם $s(x)$ כלומר הפתרון למד"ר ההומוגנית המקיים $s(0) = 0$ וכן $s'(0) = 1$.

אזי פתרון פרטי למד"ר הלא הומוגנית הוא הקונבולוציה עם התגובה להלם

$$y(x) = f * s = \int_{x_0}^x f(u) s(x-u) du$$

חלק ד' – התמרת לפלס והדלתא של דירק:

$$\text{התמרת לפלס} - \mathcal{L}(y) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt$$

התמרות לפלס ידועות –

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a}$$

$$\mathcal{L}(\delta(t - a)) = e^{-sa}$$

תכונות התמרת לפלס –

יחידות –

אם y_1, y_2 רציפות וכן $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2)$ אזי $y_1 = y_2$.

לינאריות –

$$\mathcal{L}(y_1 + ay_2) = \mathcal{L}(y_1) + a\mathcal{L}(y_2)$$

התמרת הנגזרת הראשונה –

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

התמרת הנגזרת –

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(y) - s^{n-1}y(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

נגזרת ההתמרה –

$$\mathcal{L}(ty) = -F'(s)$$

הזזה של המשתנה s – אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$F(s - a) = \mathcal{L}(e^{at}y(t))$$

הזזה של המשתנה t - אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}(u(t-a)y(t-a))$$

כאשר $u(t)$ היא פונקצית המדרגה:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

חלק ה' - שיטת אוילר לקירוב נומרי

תהי בעיית קושי $y' = f(x, y)$, עם תנאי ההתחלה $f(x_0) = y_0$.

שיטת אוילר $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$

השיטה המשופרת של אוילר $y_{n+1} = y_n + f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + f(x_n, y_n) \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot h$