25.3.14 (1)

Dahlquist   יציבות לינארית - פותח ע"י מתמטיקאי שוודי בשם

$y'=\lambda y$, $y(0)=1$, הפתרון: $(y(x)=e^{\lambda x})$

$y=\alpha+i\beta$ $\lambda\in\mathbb{C}$

$\alpha'+i\beta'=(\lambda_R+i\lambda_I)(\alpha+i\beta)$

נחלק לכמה מקרים:

1) $Re\lambda>0$ בעייתי כי $|y|\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$ הפתרון לא יציב כי מתפוצץ. במובן שגדל ל-∞ מהר.

גם שגיאה נומרית תלך ותגדל כי זה אקספוננציאלית כי כבר מתחילת הפתרון.

2) $Re\lambda=0$ מקרה במצב $\lambda=i\omega$

$y=e^{i\omega x}$

$|y|$ נשמר, חוק שימור

נפוץ בשבים רבים

3) $Re\lambda<0$

נדרש: $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$

(*) נרצה לשיטה נומרית יציבה אם הקבוע ש- $\lim_{n\to\infty} y_n=0$

דוגמה: אוילר $y(0)=1$ $y'=f(y)$

$y_{n+1}=y_n+hf(y_n)$

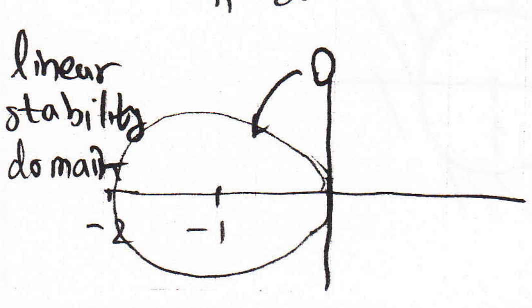
$y_{n+1}=y_n+h\lambda y_n=(1+h\lambda)y_n$

$y_n=(1+h\lambda)^n y_0=(1+h\lambda)^n$

באו נסמן $z=h\lambda$ ואז קיבלנו $y_n=(1+z)^n$

$y_n=(1+z)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

(לשיטה יציבה אם) $|1+z|<1$



הסכימה יציבה עבור

$|1+\lambda h|<1$

$-1<1+\lambda h<1 \;/-1$ λ ממשי שלילי $=\mathrm{Re}\lambda<0$

$-2<\lambda h<0$ $1-|\lambda|h>-2$

$0<h<\frac{2}{|\lambda|}$ $-|\lambda|h>-3$

ניקח לדוגמא: $h=\frac{2}{|\lambda|}$ נניח λ ממשי

$z=h\lambda=2\frac{\lambda}{|\lambda|}=-2$

$y_n=(-1)^n$

שיטה נוספת — שיטה סתומה — Back word-Euler (אוילר)

$y'=f(y)$

$y_{n+1}=y_n+hf(y_{n+1})$

$f(y)=\lambda y$

$y_{n+1}=y_n+h\lambda y_{n+1}$

$(1-h\lambda)y_{n+1}=y_n$

$y_{n+1}=\frac{1}{1-h\lambda}y_n$

סמן $z=h\lambda$

$y_{n+1}=\frac{1}{1-z}y_n$

$\Downarrow$

$y_n=\frac{1}{(1-z)^n}$

מתי $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$? כאשר

$\frac{1}{|1-z|}<1$ h-ממשי.

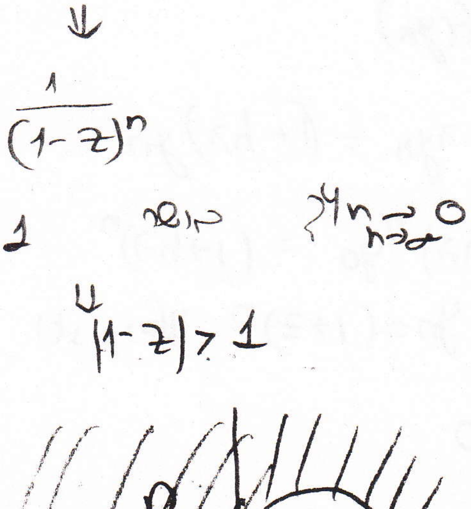
$\Downarrow$

$|1-z|>1$

הסכימה יציבה לכל h

וגם נקרא A stable

$D\supset\{z|\mathrm{Re}z<0\}$



② ERK2: midpoint בס״ד

$$\xi_1 = y_n + \frac{h}{2} f(y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(\xi_1)$$

נניח $f = \lambda y$ (הפונקציה שלנו)

$$\xi_1 = y_n + \frac{h}{2}\lambda y_n = \left(1+\frac{z}{2}\right) y_n$$, $z = h\lambda$ נסמן

$$y_{n+1} = y_n + \underbrace{h\lambda}_{z}\left(1+\frac{z}{2}\right) y_n = \left(1+z+\frac{1}{2}z^2\right) y_n$$

$y_0 = 1$ $$y_n = \left(1+z+\frac{1}{2}z^2\right)^n \cdot \underbrace{y_0}_{=1}$$

רוצים יציבות כלומר $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ צריך להתקיים $|1+z+\frac{1}{2}z^2| < 1$

$\frac{1}{2}(1+z)^2 + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}(1+2z+z^2)+$

$$|(1+z)^2+1| < 2$$

(*)

עבור z ממשי

$$-1 < 1+z+\frac{1}{2}z^2 < 1$$

$-1 < 1+z+\frac{1}{2}z^2$

$-2 < z+\frac{1}{2}z^2$ $/\cdot 2$

$-4 < 2z+z^2$

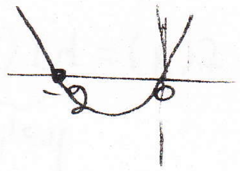
$z(2+z)$ אין פתרון ממשי.

$z=0 \quad z=-2$

$1+z+\frac{1}{2}z^2 < 1$

$z\left(1+\frac{z}{2}\right) < 0$

$z=0 \quad z=-2$



(*) z מרוכב סביב -1 לכן נבדוק

$$z = -1 + i\alpha$$

$$(1+z)^2 + 1 = -\alpha^2 + 1$$

$$|\alpha^2 - 1| < 2$$

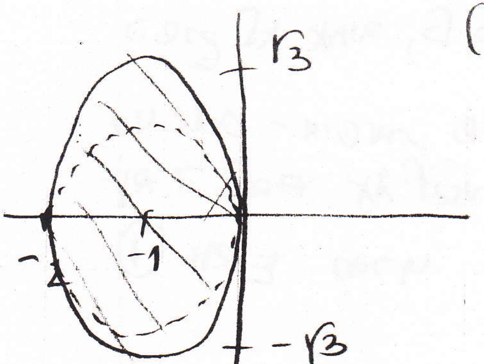
$$-2 < \alpha^2 - 1 < 2$$

$\alpha^2 - 1 < 2$

$\alpha^2 < 3$

$-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$

$\alpha^2 - 1 > -2$ תמיד



משפט: אין שיטת ERK שהן Astable

שיטת גאוס-לז'נדר (IRK עם סדר מקסימלי) היא Astable-

יציבות של מערכת משוואות

$$y' = Ay \qquad y \in \mathbb{R}^n$$

נניח את הבעיה $A = P^{-1}\Lambda P$ $\qquad A \in M_n$

$$y' = P^{-1}\Lambda P y$$

$$(Py)' = \Lambda (Py)$$

נגדיר $\eta = Py$

$$\eta' = \Lambda \eta$$

n משוואות לא מצומדות.

יציבות: תנאי היציבות צריך להתקיים לכל ערך אח.

מדבר — פונקציות ב Matlab

explicit ode-45 (לא חשבונות רגילות)

implicit ode 23 (זמנים שבבעיה של יציבות)

- שינוי גודל צעד

variable step size

$$y = f(y) = hJ(y_n)_y + O(h^2)$$

- אם המשוואה לא לינארית נעשה לינאריזציה (יעקוביאן) ונדרוש בכל צעד הסכימה תהיה יציבה

ננסה את הצעד הגדול ביותר בכל הצעדים שנשנה

ode 45 - מנסים להעריך את הצעד ע"י פקודות במטלב. ה-ode 45 מחזירה $[x_n, y_n]$ השריג לא אחיד, כל צעד עושים עם RK.

ode 45 - מימוש שיטה של המתמטיקאים Dormand-Prince, שיטת ERK עם 7 שלבים ע"מ לבצע 2 סכמות שונות.

(1) ERK סדר 4 $\qquad$ (2) ERK סדר 5

(3)

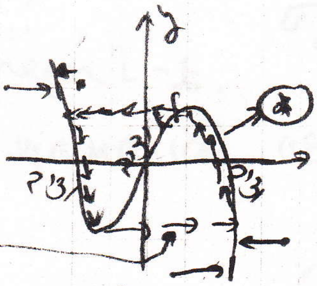
תרגיל 3:

$$\dot{y} = -1 - y + 8x^3$$

$$\dot{x} = w(\underline{-y + x - x^3})$$

$w >> 1$

$y = x - x^3$



$y = x - x^3$

relaxation oscillator

$\boxed{\text{נרצה להשתמש בפתרון סתום}}$ implicit explicit

שגיאה לוקלית $\cdot \frac{1}{h}$ = שגיאה גלובלית – ישלנו מס' קטן של צעדים ימינה אם
ישלנו שגיאה גדולה הוא לא תמיד כי רוצים לזמן ארוך ? (*)

(תנאי) כי $Re\,\lambda = 0$

$\underline{\lambda = i}$

$z'(t) = i\,z(t) \qquad z'(0) = z_0$

$z(t) = e^{it} z_0$

$z(t) = x(t) + iy(t)$

$x' + iy' = i(x + iy)$

$$\begin{cases} x' = -y & x_0 \\ y' = x & y_0 \end{cases}$$

$x'' - x$

$|z(t)|^2 = |z_0|^2$

$I(t) = x^2(t) + y^2(t)$

$I' = 2xx' + 2yy' = 2x(-y) + 2yx = 0$

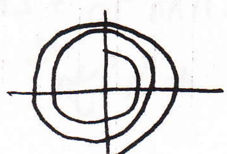
forward Euler – אוילר

$z_{n+1} = z_n + hf(z_n) = z + hiz_n$

$z_{n+1} = (1 + hi)\,z_n$

$z_n = (1 + hi)^n z_0$

$|z_n| = |1 + hi|^n |z_0|$
$\Rightarrow 1$



N–מס' הצעדים סה"כ $\quad h = \frac{T}{N}$

$\boxed{z_0=1}$ נניח   סוף $t=T$

$$|z_n=(1+ih)^n \underset{=1}{z_0}$$

$$|z_n|=\sqrt{1+h^2}^{\,n}\,z_0=(1+h^2)^{\frac{n}{2}}=\left(1+\frac{T^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\sim 1+\frac{T}{n}e^{T/2}+O(h^2)$$

$$=1+he^{T/2}$$

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

i יחידה

בגבול ל' סכום מתכנס ל-1.

Forword Oiler (ft): לא משנה מה נגדל הצעד תמיד השגיאה תהיה ק' שהרכיבים יגדל.

Beckwords oiler (Bt)

$$z_{n+1}=z_n+hf(z_{n+1})$$

$$z_{n+1}=z_n+ihz_{n+1}$$

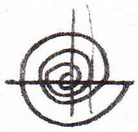
$$(1-ih)z_{n+1}=z_n$$

$$z_{n+1}=\frac{1}{1-ih}z_n$$

$$z_n=\frac{1}{(1-ih)^n}z_0$$

$$|z_n|=\left(\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\right)^n|z_0|$$

$$|z_n|=(1+h^2)^{-n/2}\underset{\substack{n\gg 1\\ h=T}}{\sim}1-he^{T/2}+O(h^2)$$



דרגה של סתיות

$$\begin{cases}x_{n+1}=x_n-hy_n\\ y_{n+1}=y_n+hx_{n+1}\end{cases}\qquad \begin{cases}\text{עבור } x: & ft\\ \text{עבור } y: & Bt\end{cases}\begin{cases}x'=-y\\ y'=x\end{cases}$$

$$y_{n+1}=y_n+h(x_n-hy_n)=y_n+hx_n-h^2y_n$$

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -h\\ h & 1-h^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$$

הכללה
Semi-implicit Euler
simplecitic Euler

$$|z_{n+1}|^2=x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=(x_n-hy_n)^2+(y_n+hx_n-h^2y_n)^2=$$

$$=\underbrace{x_n^2+y_n^2}_{|z_n|^2}-2hx_ny_n+2hx_ny_n+h^2(y_n^2+x_n^2-2y_n^2)-2h^3x_ny_n+h^4y_n^2$$

$$I_{n+1}=|z_{n+1}|^2\overset{(4)}{=}\underbrace{|z_n|^2}_{I_n}+h^2(x_n^2-y_n^2)-2h^3x_ny_n+h^4y_n^2$$

(נבדוק: להוסיף R_n

$$R_n=x_n^2+y_n^2-hx_ny_n$$

$$R_{n+1}=I_{n+1}-hx_{n+1}y_{n+1}=I_n+h^2x_n^2\overset{-h^2y_n^2}{}-2h^3x_ny_n+h^4y_n^2$$

$$-h\underbrace{(x_n-hy_n)(y_n+hx_n-h^2y_n)}_{x_ny_n-hy_n^2+h}$$

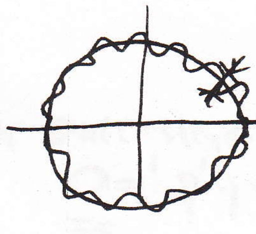
הכל מצטמצם.

$$\Rightarrow \boxed{R_{n+1}=R_n}$$

לסכימה המעורבת יש תנאי שימור הדיסקרטי (לא מדויק).

הוא שונה מתנאי השימור של הפתרון המדויק

(וההבדל ביניהם הוא מסדר גודל h. $[O(h)]$.



תנאי השימור קיבל הפרעה וישנו תוספת

מסדר h $(-hx_ny_n)$ ב-R_n למעלה.

ל-$\underline{f_t}$; $\underbrace{B_t}$ אין תנאי שימור

תמיד הולך ומתרחב ; תמיד מתכנס פנימה

אם המשוואה מהצורה $x'=f(x,y)$, $y'=g(x)$ לא צריך שיטה סמויה.

בעיה בפיסיקה — N body problem

$N\in\mathbb{R}^3$ מסות של $m_1,\ldots m_n$

מיקומים $q_1,\ldots q_n$, $q_k\in\mathbb{R}^3$

מהירויות $v_1,\ldots v_n$, $v_k\in\mathbb{R}^3$

חוקי ניוטון: $F=ma$

$$q=\begin{pmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}\quad v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\quad M=\begin{pmatrix}m_1&&&&&&\\&m_1&&&&&\\&&m_1&&&&\\&&&m_2&&&\\&&&&m_2&&\\&&&&&m_2&\\&&&&&&\ddots\end{pmatrix}$$

$$v=q'\qquad a=v'$$

$$F(q)=Mv'$$

$$\boxed{\begin{cases}q'=v\\ v'=M^{-1}F(q)\end{cases}}$$

נעבור עם שני משתנים.

$$p=Mv$$
$$q'=M^{-1}p$$
$$p'=f(q)$$

יש לו תנאי שימור האנרגיה: המילטוניאן $H(q,v)$

$$H=\frac{1}{2}p^T M^{-1} p + V(q)$$ כדי תוך שימור האנרגייה

$$f(q) = -\nabla V(q)$$

נראה שאכן H זהו תוך שימור האנרגיה.

משוואות התנועה של המילטון

$$\begin{cases} q' = \nabla H_p \\ p' = -\nabla H_q \end{cases}$$

שזה בדיוק שווה

$$\begin{cases} q' = M^{-1}p \\ p' = f(q) \end{cases}$$

① H תוך שימור האנרגיה

$$H' = (\nabla H_q)\cdot q' + (\nabla H_p)\cdot p' = -p'\cdot q' + p'q' = \underline{\underline{0}}$$

H לפי q.   לפי p.

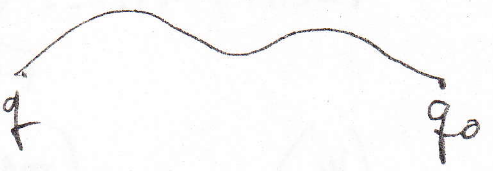
H גודל נשמר.

② תכונה: סימטריה תחת היפוך הזמן

$t \mapsto -t$ המשוואות סימטריות תחת

$p \mapsto -p$

$$\begin{cases} q' = \nabla H_p \\ p' = -\nabla H_q \end{cases} \xrightarrow{t\to -t} \begin{cases} -q' = \nabla H_p \\ -p' = -\nabla H_q \end{cases} \xrightarrow{p\to -p} \begin{matrix} -q' = -\nabla H_p \\ p' = -\nabla H_q \end{matrix}$$



פיזיקאי: $\underline{\underline{k=1}}$, מימד 1. $m=1$

פוטנציאל הרמוני. $V(x) = +\frac{1}{2}x^2$

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x^2+p^2)$$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

③ סימפלקטי שקיבלנו

$$q' = \nabla H_p = p$$
$$p' = -\nabla H_q = -q$$

$\boxed{\text{אוסצילטור הרמוני}}$