צורת פתרון כללי במקרה הכללי

$$y' = Ay$$

$$\Updownarrow$$

$$(My)' = My' = MAy = MAM^{-1}\,My$$

הצבה : $z \coloneqq My, B \coloneqq MAM^{-1}$

$$\Updownarrow$$

$$z' = Bz$$

ניקח B להיות מטריצת ז'ורדן (M מטריצה מז'רדנת) והמערכת מתפצלת לבלוקים :

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} y$$

לדוגמה,

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

מתפצל ל- :

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y, \qquad z' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} z$$

הטענה היא :

$$y' = J(\lambda)_{n\times n\ \text{ז'ורדן}}\, y, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

אזי הפתרון הכללי הוא מהצורה :

$$\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

כאשר כל $p_j(x)$ פולינום מדרגה $(n-1)$.

נפתור שורה – שורה:

$$y_n' = \lambda y_n \Longrightarrow y_n = c_n e^{\lambda x}$$

$$y_{n-1} = \lambda y_{n-1} + y_n$$

$$\Longrightarrow \left(y_{n-1}e^{-\lambda x}\right)' = c_n$$

$$y_{n-1}e^{-\lambda x} = c_n x + c_{n-1}$$

$$\Longrightarrow y_{n-1} = e^{\lambda x}(c_n x + c_{n-1})$$

פתרון כללי למערכת:

$$y' = J(\lambda)_{n\times n \text{ ז'ורדן}}\, y$$

הוא:

$$y(x) = e^{\lambda x}\left[c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}x\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right]$$

הפתרון למערכת:

$$y' = Ay$$

האקספוננט המטריציונלי הוא:

$$\vec{y} = e^{Ax}\overrightarrow{y_0}$$

כאשר עבור מטריצה קבועה M נגדיר:

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M^k}{k!}$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

$$e^{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}} = e^{\lambda}\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{n!}\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

סיכום

1. ניתן לפתור מערכת עם מקדמים קבועים בצורה ישירה אם היא לכסינה:
$$y(x) = \sum c_j \vec{v}_j \cdot e^{\lambda j}$$
2. ערכים עצמיים מרוכבים באים בזוגות צמודים (יחד עם הוקטורים העצמיים שלהם) וניתן לקחת חלק ממשי וחלק מדומה כפתרונות בלתי תלויים לינארית.
3. ריבוי בערך עצמי, מעבר למימד המרחב העצמי $\Longleftarrow$ מדביקים פולינום מדרגת הניוון.
אפשר דרך צורת ז׳ורדן, דרך אקספוננט מטריציונלי, או דרך ״ניחוש״ + הצבה במשוואה.

דוגמה

$$x' = \lambda - dx$$
$$y' = -\alpha y$$
$$v' = ky - uv$$

$$\Longrightarrow y = y_0 e^{-\alpha t}$$
$$v' = ky - uv$$
$$\Longrightarrow v = v_0 \cdot \frac{ue^{-\alpha t} - ae^{-\alpha t}}{u - \alpha}, \qquad 0 = ky_0 - uv_0, \qquad v_0 = \frac{k}{4} y_0$$
$$v \sim v_0 e^{-\alpha t}$$