6/11/17

הסתברות מותנית:

דוגמא:

נניח שאני מטילים שתי קוביות: $\Omega=\{(1,1)(1,2)\dots(6,6)\}$, $|\Omega|=36$.

אם הקוביות הוגנות, Ω הוא מרחב מדגם סימטרי. $\boxed{\frac{|A|}{|\Omega|}}$

(א) מה ההסתברות של סכום קוביות 8?

← $A=\{\text{סכום שווה 8}\}$ ← $\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$, $P(A)=\frac{5}{36}$

(ב) כעת נניח שהסתכלנו רק על הקוביה הראשונה ויצא 3. מה ההסתברות שהסכום יצא 8? ← כעת למעשה הניסוי השתנה: $\Omega^*=\{(3,1)(3,2),\dots,(3,6)\}$

והמאורע יצא 8 גם הוא השתנה: $A=\{\text{יצא סכום 8 כשידוע שהקוביה הראשונה 3}\}=\{(3,5)\}$

← הקוביה השניה עדיין הוגנת ולכן Ω^* סימטרי: $P(A^*)=\frac{1}{6}=\frac{6}{36}>P(A)$.

המידע על חלק מהניסוי שינה את מרחב המדגם ובהתאם את ההסתברות

$P(A^*)>P(A)$ כי קוביה $1=3$ ⇐ אפשר להגיע לסכום 8 (בניגוד לקוביה $1=1$).

דוגמא 2:

יהיו E,F מאורעות ונניח ש-$P(F)>0$. מגדירים את ההסתברות של E בהינתן F.

סימון: $P(E|F)$ (בהינתן) ⇐ $\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$.

← בהקשר הדוגמא הקודמת: נסמן $A=\{\text{סכום שווה 8}\}$, $B=\{\text{הקוביה הראשונה יצא 3}\}$.

למעשה חישבנו: $P(A|B)$, $P(A^*)$, לפי הנוסחא:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\underset{\Omega\text{ סימטרי}}{=}\frac{|A\cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|}=\frac{|A\cap B|}{|B|}$$

$$=\frac{|\{\text{סכום 8 וגם 3 בקוביה 1}\}|}{|\{\text{3 בקוביה I}\}|}=\frac{|\{(3,5)\}|}{|\{(3,1)(3,2)\dots(3,6)\}|}=\frac{1}{6}$$

← נשים לב שהנוסחא מסתדרת עם החישוב הקודם.

* דוגמא 3:

מטילים שני מטבעות הוגנים. (א) מה ההסתברות ששניהם יהיו "עץ" בהינתן שהראשון עץ?

(ב) מה ההסתברות ששניהם יהיו "עץ" בהינתן שאחד מהם לפחות "עץ"?

← במבט ראשון התשובות ברורות/הינן זהות כי "מה זה משנה?". חישוב מדויק מראה אחרת:

נגדיר מאורעות: $A=\{\text{שניהם עץ}\}$, $B=\{\text{ראשון עץ}\}$, $C=\{\text{אחד מהם לפחות עץ}\}$. עץ-1, פלי-0.

$\Omega=\{(1,1)(1,0)(0,1)(0,0)\}$, $A=\{(1,1)\}$, $B=\{(1,0)(1,1)\}$, $C=\{\underset{}{\overset{\text{בגלל "לפחות"}}{\boxed{(1,1)}}},(1,0),(0,1)\}$

→ $A\cap B=A\cap C=\{(1,1)\}$, $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{3}{4}$

→ $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$, $P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$

← יוצא שזה משנה!

מסקנה: מהגדרת $P(E|F)$:

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

חוק הכפל: $P(F)\cdot P(E|F)=P(E\cap F)$

← ההסתברות ש-$E\cap F$ יתרחש היא מכפלת ההסתברויות (של השלבים):

שלב א': F מתרחש,

שלב ב': בהינתן ש-F התרחש (בהינתן שלב א') גם E מתרחש.

* דומה לחוק הכפל הקומבינטורי.

חוק הכפל המוכלל:

אם $E_1,E_2,...,E_n$ הם מאורעות בעלי הסתברות חיובית (לא אפס)

אז $\Rightarrow P(\bigcap_{i=1}^{n}E_i)=P(E_1\cap E_2\cap...\cap E_n)=P(E_1)\cdot P(E_2|E_1)\cdot P(E_3|E_2\cap E_1)\cdots P(E_n|E_{n-1}\cap E_{n-2}\cap...\cap E_1)$

← ההסתברות שכולם יתרחשו יחד היא מכפלת ההסתברויות של השלבים.

שלב א': E_1 מתרחש

שלב ב': בהינתן E_1 מתרחש, E_2 מתרחש

שלב ג': בהינתן שני השלבים הקודמים E_3 מתרחש

וכן הלאה...

דוגמא: "בעיית המזכירה".

שמים ב-N מעטפות, N מכתבים באקראי. לכל המעטפות N שמות שונים ואותם שמות על המכתבים. לכל מעטפה נכנס מכתב יחיד.

(א) מה ההסתברות שאף מכתב לא יגיע ליעדו?

← התשובה: $P_N=\sum_{i=0}^{N}(-1)^i/i!$. אין צורך לחשב.

* במספר בספר 2.5 מופיע החישוב המלא.

(ב) ידוע התשובה ל-(א). מה ההסתברות שבדיוק k מהאנשים יקבלו את המכתב שלהם?

← פתרון לחלק לשלבים. נניח ראשית שבחרנו k אנשים שיקבלו את המכתב שלהם, ו-$(N-k)$ שלא יקבלו את המכתב שלהם. כמו כן, ולכל מאחד יכולים... יקבלו את המכתב שלהם והשאר לא.

נסמן: $E=\{$כל הנבחרים קיבלו את המכתב שלהם$\}$, $G=\{$כל השאר לא קיבלו את המכתב שלהם$\}$

אנו רוצים לחשב $P(E\cap G)$, נעשה זאת בעזרת חוק הכפל. $P(E\cap G)=P(E)\cdot P(G|E)$

נחשב את $P(G|E)$: בהינתן ש-E מתרחש, מתוך N המעטפות יש $N-k$ שאין בהן את המכתבים המתאימים להם (המכתבים של הנבחרים)! $(N-k)$ מעטפות פתוחות; $(N-k)$ מכתבים שיש להכניס למעטפות ← המשך (בדף הבא)

6/11/17

המשך-

המשך בעית המזכירה:

$$P(G|E)=\begin{pmatrix}(N-k)\text{ מכתבים - קופסאות }(N-k) \\ \text{מטפטר ללא אף התאמה וכו'}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\text{בעיית המזכירה} \\ \text{עם } N-k\end{pmatrix}$$

לפי (10) $\Rightarrow$ $$P_{N-k}=\sum_{i=0}^{N-k}(-1)^i/i!$$

כמה עם $P(E)$?

נסמן:

$$F_1=\left\{\begin{matrix}\text{המכתב של הנבחר} \\ \text{הראשון - עמית, הגיע ליעדו}\end{matrix}\right\},\ F_2=\left\{\begin{matrix}\text{כנ"ל} \\ \text{הנבחר השני}\end{matrix}\right\},\ \text{וכהלאה...}$$

$$F_i=\left\{\begin{matrix}\text{המכתב של} \\ \text{הנבחר ה-}i \\ \text{הגיע ליעדו}\end{matrix}\right\} \quad i=1,2,\dots,k$$

נשים לב ש-
$$\underbrace{E}_{\text{כולם הגיעו ליעדם}}=\underbrace{F_1}_{\text{הראשון}}\cap \underbrace{F_2}_{\text{וגם השני}}\cap\dots \text{וגם} \cap \underbrace{F_k}_{\text{ה-}k}$$

כעת נחשב בעזרת חוק הכפל:

$$P(E)=P(F_1)\cdot P(F_2|F_1)\cdot P(F_3|F_2\cap F_1)\cdot P(F_4|F_3\cap F_2\cap F_1)\cdots P(F_k|F_{k-1}\cap F_{k-2}\cap\dots\cap F_1)$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{N-(k-1)}=\frac{1}{N!}\cdot(N-k)!$$

$$P(E\cap G)=\frac{(n-k)!}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n-k}(-1)^i/i!$$

סה"כ:

צריך לקחת בחשבון שזו הסתברות ש-k נבחרים יקבלו את המכתב שלהם וההסתברות המבוקשת היא ש-k כלשהם (בדיוק) יקבלו את מכתבם. צריך לחבר את כל האפשרויות השונות: $\binom{n}{k}$.

$$P\begin{pmatrix}\text{בדיוק } k \\ \text{מכתבים לעדם}\end{pmatrix}=\binom{n}{k}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}\cdot\sum_{i=1}^{n-k}(-1)^i/i!=$$ ← תשובה סופית!

$$=\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-k)!}k!}\cdot\frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}}\cdot\sum_{i=1}^{n-k}(-1)^i/i!=\frac{1}{k!}\cdot\sum_{i=1}^{n-k}(-1)^i/i!$$

מאורעות בלתי תלויים:

"לדעת את E לא עוזר בשביל F".

משל אם מטילים שני מטבעות הוגנים: $F=\{0 \text{ במטבע } II\}$, $E=\{1 \text{ במטבע } I\}$

E,F הם בלתי תלויים (ב"ת)

← זה אינטואיציה: בהינתן E, ההסתברות של F לא משתנה.

כלומר: $\boxed{p(F\cap E)=p(E)\cdot p(F)}$; $p(F)=\frac{p(F\cap E)}{p(E)}$; $\boxed{P(F|E)=P(F)}$ <=

הגדרה:

מאורעות E,F הם ב"ת אם מתקיים $p(E\cap F)=p(E)\cdot p(F)$

← מסקנה: אם $0<P(E)$ וגם E,F ב"ת אז $P(F|E)=P(F)$. הגדרה מקבילה

למשל:

אם מטילים שני קוביות: $A=\{\text{יצא סכום } 7\}$, $B=\{\text{קוביה } I \text{ יצא } 4\}$.

אז A,B ב"ת: $p(A)=\frac{\{(1,6)(2,5)(3,4)(4,3)(5,2)(6,1)\}}{|\Omega|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}$

$P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\frac{|\{(4,3)\}|}{|\Omega|}=\frac{1}{36} \xRightarrow{\text{לכן}} P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow$ ב"ת B,A <~

* ואפשר גם לבדוק שמתקיים גם: $p(A|B)=p(A)$, $p(B|A)=p(B)$.

תכונות:

אם A,B מאורעות זרים עם הסתברות חיובית האם הם ב"ת? תשובה תמיד תלויים!

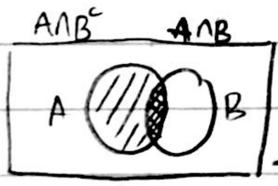
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\emptyset)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$$

← אבל $0<P(A)$, לכן $P(A|B)\neq P(A)$ ולכן הם תלויים.

דרך אחרת: $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$, $P(A\cap B)=0<P(A)\cdot P(B)$

חיובים.

מסקנה: A, A^c תמיד תלויים.



טענה: אם נתון A,B ב"ת אז גם: ① A,B^c ב"ת, ② A^c, B^c ב"ת.

הוכחה ①: $A=(A\cap B)\,\dot{\cup}\,(A\cap B^c) \xRightarrow{\text{אקסיומה 3}} P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=P(A)P(B)+P(A\cap B^c)$

$P(A)-P(A)P(B)=P(A\cap B^c) \Rightarrow P(A)(1-P(B))=P(A\cap B^c) \Rightarrow \boxed{P(A)P(B^c)=P(A\cap B^c)}$

$\Leftarrow$ A,B^c ב"ת לפי הגדרה.

② כמו כן. לחזור על ההוכחה כאשר B^c במקום A ו-A במקום B.

6/11/17

-המשך-

דוגמא: (המשך של הקודמת

בהטלת שתי קוביות:

$A=\{\text{סכום } 7\}$, $B=\{\text{קוביה I יצא } 4\}$, $C=\{\text{קוביה II יצא } 3\}$

← ראינו מקודם ש- A,B ב"ת. בדומה, גם A,C ב"ת.

כמו כן B,C הם ב"ת כי הקוביות לא משפיעות אחת על השניה.

(שימו לב ש A,B,C "תלויים" כי $P(A|C\cap B)=1\neq P(A)$.

הגדרה:

מאורעות A,B,C הם ב"ת אם מתקיים ביחד:

① $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$ - לא התקיים.

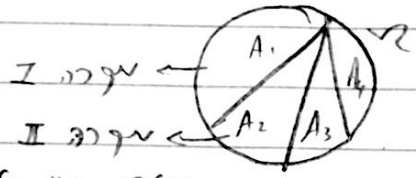
בדוגמא הקודמת מתקיים
$$\left\{\begin{array}{ll} ② & P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \\ ③ & P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C) \\ ④ & P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)\end{array}\right.$$

← לא מספיק רק חלק מהשוויונות.

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן סדרה של מאורעות זרים בזוגות $A_1 \ldots A_n$ כך שמתקיים $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ אז לכל מאורע B מתקיים:

$$P(B)=P(B|A_1)\cdot P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+\ldots+P(B|A_n)\cdot P(A_n)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i)$$



← הרעיון: מחשבים את $P(B)$ ע"י חלוקה למקרים $(A_1, A_2 \ldots)$ במקרה

$P(B|A_i)$ יותר קל לחישוב מ-$P(B)$.

מחברים בחזרה את התוצאות ע"י כפל בהסתברות המקרה וסכימה.

ממוצע משוקלל של $P(B|A_i)$, המשקל - $P(A_i)$.

דוגמא:

מה ההסתברות שבחפיסת קלפים מעורבבת באקראי, יופיע $\underbrace{\text{הקלף } X}_{\text{בחרנו קלף מסוים.}}$ מיד אחרי האס הראשון?

← פתרון: נחלק למקרים:

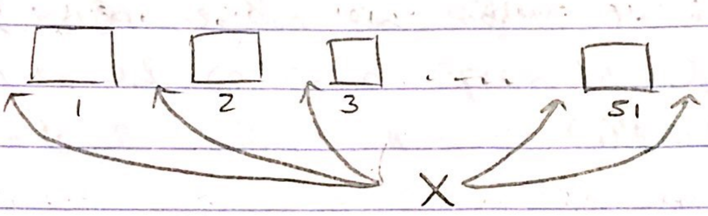
שלב א': נוציא את הקלף X ונערבב את החפיסה. קיבלנו סידור של 51 קלפים ללא X.

שלב ב': כעת נכניס בחזרה את הקלף X באחד המקומות (נשאל עכשיו מה הסיכוי שהקלף שלפניו הוא האס הראשון.

המשך

בהינתן הערבוב של שלב א', קל לחשב את ההסתברות שבשלב ב'.

$$P\left(\text{X מיד אחרי האס הראשון} \,\middle|\, \text{ערבוב של 51 קלפים}\right) = \frac{1}{52}$$



← לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\left(\text{X מיד אחרי האס הראשון}\right) = \sum P\left(\text{X מיד אחרי אס I} \,\middle|\, \text{ערבוב של 51 קלפים אחרים}\right) \cdot \underbrace{P\left(\text{ערבוב של 51 אחרים}\right)}_{\text{לכולם אותה הסתברות (מקרה סימטרי)}} = \sum \frac{1}{52} \cdot P = \frac{1}{52}$$

סכום על כל הערבובים השונים של 51 קלפים.

$$P(\Omega) = \sum P = 1 = P\left(\text{סידור 51 הקלפים בסדר כלשהו}\right)$$