תזכורת - מערכות של משוואות ליניאריות מסדר ראשון

- משפט ליוביל (אנלוגי למשפט אבל)
- וריאציית מקדמים (אנלוגי למשוואה מסדר גבוה)

- כל משוואה מסדר גבוה ניתן לכתוב במערכת מסדר ראשון

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1(x) & a_2(x) & \cdots & \cdots & a_n(x) \end{pmatrix} y$$

- קיום : מערכות עם מקדמים קבועים $y' = Ay$ כאשר A מטריצה עם מקדמים ב - $\mathbb{R}$ וגם מערכת אי הומוגנית $y' = Ay + \vec{b}(x)$, כאשר $\vec{b}(x)$ מכיל פונקציית המושמדות על ידי אופרטור דיפרנציאלי עם מקדמים קבועים (לדוגמה פולינומים).

דוגמה 1

מטריצה אלכסונית :

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} y$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 3y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{2x} \\ y_2(x) = c_2 e^{3x} \end{cases}$$

דוגמה 2

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} y$$

$$\Longrightarrow y_2' = 3y_2 \Longrightarrow y_2 = c_2 e^{3x} \Longrightarrow y_1' = 2y_1 + c_2 e^{3x}$$

תזכורת

אם מטריצה A לכסינה אזי:

$$A = P^{-1}DP$$

כאשר D מטריצה אלכסונית, P מטריצת שינוי בסיס (עמודותיה הם הוקטורים העצמיים)

לא כל מטריצה לכסינה, אך מעל כל שדה סגור אלגברית ($\mathbb{C}$) ניתן "כמעט ללכסן":

$$A = P^{-1}JP$$

כאשר:

$$J = \begin{pmatrix} (\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_4) \end{pmatrix}$$

לדוגמה,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אינה לכסינה אך ניתן למצוא את צורת הז'ורדן שלה.

הערה

$$y' = Ay$$

אם $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ, כלומר:

$$Av = \lambda v$$

אם ניקח:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda x} \\ v_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{y}' = \lambda y$$

לכן נקבל:

$$y' = Ay = \lambda y$$

דוגמה 1

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} y$$

המטריצה לכסינה:

פולינום אופייני:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = 1,2$$

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\ker(A - I) = \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \\ = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 2:}$

$$\ker(A - 2I) = \ker\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} e^x, \qquad \begin{pmatrix} c_2 \\ -2c_2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

פותרים. לכן הפתרון הכללי הוא:

$$\vec{y}(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

דוגמה 2

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} y$$

הפולינום האופייני:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm 3i$$

$\underline{\lambda = 3 + 3i:}$

$$\ker\begin{pmatrix} 1 - 3i & -2 \\ 5 & -1 - 3i \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 3i \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 3 - 3i:}$

בגלל ש - $3 - 3i$ צמוד של הערך העצמי השני הוקטורים העצמיים המתאימים להם גם צמודים. לכן:

$$= c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} e^{(3-3i)x}$$

סך הכל, פתרון כללי:

$$y(x) = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 3i \end{pmatrix} e^{(3+3i)x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} e^{(3-3i)x}}_{\overline{y_1}}$$

לפי נוסחת אוילר:

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{3x}(\cos 3x + i\sin 3x) =$$
$$= \begin{pmatrix} 2e^{3x}\cos 3x + 2ie^{3x}\sin 3x \\ e^{3x}(\cos 3x + 3\sin 3x) + ie^{3x}(\sin 3x - 3\cos 3x) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow y(x) = K_1 e^{3x}\begin{pmatrix} 2\cos 3x \\ \cos 3x + 3\sin 3x \end{pmatrix} + K_2 e^{3x}\begin{pmatrix} 2\sin 3x \\ \sin 3x - 3\cos 3x \end{pmatrix}$$

דוגמה 3

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y$$

פולינום אופייני:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$\lambda = 2$ ערך עצמי יחיד (כפול)

$$\ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow y_1(x) = c_1 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מובטח (מסיבות שיהיו ברורות בהמשך ההרצאה) פתרון מהצורה:

$$y(x) = \begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix} e^{2x} = \begin{pmatrix} a+bx \\ c-bx \end{pmatrix} e^{2x}$$
$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2a+2bx+b \\ 2c+2dx+d \end{pmatrix} e^{2x}$$
$$Ay(x) = e^{2x}\left[A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{matrix} 1. & A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix} \\ x. & A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ 2d \end{pmatrix} \end{matrix}$$

מהמשוואה של x נקבל ש - $b = -d$ מכיוון ש - $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A (אם נוציא 2 סקלר
מהמטריצה באגף ימין נקבל $A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ו – 2 ערך עצמי לכן הוא וקטור עצמי המתאים ל-2)

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \Longrightarrow c = -a-b$$

לכן פתרון כללי: $y(x) = \begin{pmatrix} a+bx \\ -a-b-bx \end{pmatrix} e^{2x}$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$.