01.08.24

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – מועד א' – תשפ"ד

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x,y והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x = 1 + a \\ -ax + (a^2-9)y = -4a \\ x + (a^2-9)y = (a-1)^2 \end{cases}$$

ראשית נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1+a \\ -a & a^2-9 & | & -4a \\ 1 & a^2-9 & | & (a-1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+aR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1+a \\ 0 & a^2-9 & | & a^2-3a \\ 0 & a^2-9 & | & (a-1)^2-(1+a) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1+a \\ 0 & a^2-9 & | & a^2-3a \\ 0 & a^2-9 & | & a^2-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1+a \\ 0 & a^2-9 & | & a^2-3a \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

אם $a \neq \pm 3$ המערכת מדורגת, ללא שורת סתירה, ללא משתנים חופשיים ולכן יש פתרון יחיד.

אם $a = 3$ נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

שהיא מדורגת, ללא שורת סתירה, עם משתנה חופשי, ולכן יש אינסוף פתרונות.

אם $a = -3$ נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 18 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

שהיא בעלת שורת סתירה ולכן אין פתרונות

ב. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 3$.

כיוון שהמטריצה שאליה הגענו עבור $a = 3$ היא מדורגת קנונית רק נשאר להציב פרמטרים במשתנה החופשי y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$y = t$$

$$x = 4$$

והפתרון הכללי הוא

$$(4,t)=(4,0)+t(0,1)$$

ג. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a=-1$.

נציב $a=-1$ בצורה המדורגת ונמשיך לדירוג קנוני

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{8}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

ולכן הפתרון היחיד הוא

$$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$$

<u>שאלה 2</u> תהי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המקיימת

$$T(1,0)+T(1,1)=(1,0)$$

$$T(1,0)=(a,b)$$

א. חשבו את $T(-1,0)-T(1,1)$.

$$T(-1,0)-T(1,1)=-T(1,0)-T(1,1)=-\big(T(1,0)+T(1,1)\big)=(-1,0)$$

ב. הביעו את $[T]$ בעזרת a,b.

$$T(0,1)=T(1,1)-T(1,0)=T(1,1)+T(1,0)-2T(1,0)=(1,0)-(2a,2b)=(1-2a,-2b)$$

ולכן

$$[T]=\begin{pmatrix}| & |\\ T(1,0) & T(0,1)\\ | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 1-2a\\ b & -2b\end{pmatrix}$$

ג. חשבו עבור אילו ערכי a,b המטריצה $[T]$ הפיכה.

המטריצה הפיכה אם ורק אם הדטרמיננטה שלה שונה מאפס.

$$\det([T])=\det\begin{pmatrix}a & 1-2a\\ b & -2b\end{pmatrix}=-2ab-b+2ab=-b$$

ולכן המטריצה הפיכה אם ורק אם $b\neq 0$

ד. חשבו את $[T]^{-1}$ עבור $a=b=1$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)$$

ולכן סה"כ

$$[T]^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

שאלה 3 נביט בשדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

א. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ המקיימים כי $iz^5 = i$.

ראשית נחלק בi ונקבל כי המשוואה שקולה למשוואה $z^5 = 1$

נעבור לצורה גאומטרית

$$z^5 = cis(0)$$

ולכן חמשת הפתרונות הם

$$z_k = \sqrt[5]{1} \cdot cis\left(\frac{0 + 2\pi k}{5}\right)$$

עבור $k = 0,1,2,3,4$

ב. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ המקיימים כי $z\bar{z} + z = 1$.

נציב צורה אלגברית כללית

$$z = a + bi$$

כך ש $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a + bi)(a - bi) + a + bi = 1$$

$$a^2 + b^2 + a + bi = 1$$

נשווה את החלקים הממשיים של שני צידי המשוואה, ואת החלקים המדומים ונקבל כי

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

ולכן $a^2 + a = 1$ או $a^2 + a - 1 = 0$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

לכן סה"כ ישנם שני פתרונות למשוואה

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} + 0 \cdot i$$

ג. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ המקיימים כי $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

<u>שאלה 4</u> בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$.

א. כאשר $f(x,y) = x + y$ והתחום D הוא השטח הכלוא בין הישרים $x = 1, x = 2, y = 2, y = 4$.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_2^4 (x+y)dy\right) dx = \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_2^4 dx = \int_1^2 (4x + 8 - 2x - 2)dx =$$

$$= \int_1^2 (2x+6)dx = [x^2 + 6x]_1^2 = 4 + 12 - 1 - 6 = 9$$

ב. כאשר $f(x,y) = x^2y$ והתחום D הוא השטח הכלוא בין העקומות $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

העקומות נפגשות בנקודות $(-1,0), (1,0)$ ובין שתי נקודות אלה הפונקציה $y = 1 - x^2$ מעל הפונקציה $y = 0$

לכן סה"כ

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} x^2 y dy\right) dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2(1-x^2)^2}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2(1 - 2x^2 + x^4)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x^2 - 2x^4 + x^6)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^7}{7}\right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105}$$

ג. כאשר $f(x,y) = ye^x$, והתחום הוא $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} ye^x dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}e^x\right]_0^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 e^x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} f' = e^x & g = x^4 \\ f = e^x & g' = 4x^3 \end{Bmatrix} = \left[\frac{1}{2}x^4 e^x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 4x^3 e^x dx = \frac{e}{2} - 2\int_0^1 x^3 e^x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} f' = e^x & g = x^3 \\ f = e^x & g' = 3x^2 \end{Bmatrix} = \frac{e}{2} - 2\left[[x^3 e^x]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx\right] = \frac{e}{2} - 2e + 6\int_0^1 x^2 e^x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} f' = e^x & g = x^2 \\ f = e^x & g' = 2x \end{Bmatrix} = \frac{e}{2} - 2e + 6\left[[x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx\right] = \frac{e}{2} - 2e + 6e - 12\int_0^1 xe^x dx$$

$$= \begin{Bmatrix} f' = e^x & g = x \\ f = e^x & g' = 1 \end{Bmatrix} = \frac{e}{2} + 4e - 12\left[[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right] = \frac{e}{2} + 4e - 12(e - (e-1))$$

$$= \frac{9}{2}e - 12$$