אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 4 - פתרון

1. יהיו $f(x),g(x)\in F[x]$ ונסמן $n=\max\{\deg(f),\deg(g)\}$. אם קיימים $a_1,...,a_{n+1}\in F$ שונים כך ש $f(a_1)=g(a_1),...,f(a_{n+1})=g(a_{n+1})$ אזי $f(x)=g(x)$. הסיקו שאם שני פולינומים מזדהים כפונקציות על שדה אינסופי, אזי הם שווים כפולינומים.

פתרון: לפולינום שונה מ 0 מדרגה k יש לכל היותר k שורשים בשדה F (לפי משפט החלוקה של אויקלידס). נשים לב ש $\deg(f(x)-g(x))\le\max\{\deg(f),\deg(g)\}=n$ ולכן יש ל $f(x)-g(x)$ לכל היותר n שורשים שונים (אלא אם כן הוא 0), אבל לפי ההנחה $a_1,...,a_{n+1}$ הם שורשים של $f(x)-g(x)$, לכן בהכרח $f(x)-g(x)=0$ כלומר הפולינומים שווים. אם שני פולינומים מזדהים על שדה אינסופי, אזי להפרשם יש אינסוף שורשים, ולכן לפי הנ"ל הם בהכרח שווים.

2. כתבו במפורש את האוטומורפיזמים של $F(\sqrt[3]{2})$ מעל F (בדקו קודם כמה אוט' יש) כאשר
   א. $F=\mathbb{Q}(\rho_3)$
   ב. $F=\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$

פתרון:

א. הפולינום x^3-2 הוא אי-פריק מעל F, כיוון שדרגת ההרחבה $[F:\mathbb{Q}]=2$, ו $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=3$, וראינו בתרגול שבמקרה כזה הפולינום x^3-2 נשאר אי-פריק מעל F.

$B=\{1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}^2=\sqrt[3]{4}\}$ הוא בסיס של $F(\sqrt[3]{2})$ מעל F.

יש בדיוק 3 אוטומורפיזמים של $F(\sqrt[3]{2})$ מעל F, נראה זאת: לפי טענות מהתרגול כל אוטומורפיזם של $F(\sqrt[3]{2})$ מעתיק את $\sqrt[3]{2}$ לשורש אחר של x^3-2, וכיוון שאוטומורפיזם נקבע ע"י תמונת היוצר $\sqrt[3]{2}$ נקבל שיש לכל היותר 3 אוטומורפיזמים כאלה. אבל $F(\sqrt[3]{2})$ מכיל את שלושת השורשים של הפולינום, ולכן לפי משפט 5 מתרגול 4 נקבל שקיים אוטומורפיזם לכל שורש, ולכן יש בדיוק 3 אוטומורפיזמים:

$$id=\sigma_1:\sqrt[3]{2}\mapsto\sqrt[3]{2},\sigma_2:\sqrt[3]{2}\mapsto\rho_3\sqrt[3]{2},\sigma_2:\sqrt[3]{2}\mapsto\rho_3{}^2\sqrt[3]{2}$$

ע"מ לרשום את האוטומורפיזמים במפורש, נבדוק לאן σ_i מעתיק איבר כללי בשדה:

$$\sigma_2(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})=a+(b\rho_3)\sqrt[3]{2}+(c\rho_3{}^2)\sqrt[3]{4}$$

$$\sigma_3(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})=a+(b\rho_3{}^2)\sqrt[3]{2}+(c\rho_3{}^4)\sqrt[3]{4}=a+(b\rho_3{}^2)\sqrt[3]{2}+(c\rho_3)\sqrt[3]{4}$$

ב. השדה מכיל את $\sqrt[3]{2}$, כי $\left(\sqrt[6]{2}\right)^2=\sqrt[3]{2}$, לכן $F(\sqrt[3]{2})=F$ ואם כך יש רק את אוטומורפיזם הזהות.

3. הראו שלפולינום המינימלי של $\rho_3+\sqrt[3]{5}$ יש 6 שורשים שונים מעל $\mathbb{Q}$ בעזרת חבורת גלואה $Gal(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של x^3-5. הסיקו $E=\mathbb{Q}(\rho_3+\sqrt[3]{5})$.

פתרון: בדומה לדוגמה שראינו בכיתה, $\rho_3+\sqrt[3]{5}\in E=\mathbb{Q}(\rho_3,\sqrt[3]{5})$ וחבורת הגלואה מתמירה את השורשים $\sqrt[3]{5},\rho_3\sqrt[3]{5},\rho_3{}^2\sqrt[3]{5}$ וגם $Gal(E/\mathbb{Q})\cong S_3$.

בחירת תמורה של השורשים קובעת גם את הערך של ρ_3 שיכול להשאר במקום או לעבור ל $\rho_3{}^2$ שהם שני השורשים של הפולינום הציקלוטומי Φ_3.

נפעיל את האוטומורפיזמים על $\rho_3+\sqrt[3]{5}$ (לפי משפט מהתרגול כיוון ש $\rho_3+\sqrt[3]{5}$ שורש של הפולינום המינימלי של האיבר עצמו, כל תמונה ע"י אוטומורפיזם של E/F תיתן גם שורש של הפולינום המינימלי), ונקבל:

$$\rho_3+\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3+\sqrt[3]{5}$$
$$\rho_3+\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3+\rho_3\sqrt[3]{5}$$
$$\rho_3+\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3+\rho_3{}^2\sqrt[3]{5}$$
$$\rho_3+\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3{}^2+\sqrt[3]{5}$$
$$\rho_3+\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3{}^2+\rho_3\sqrt[3]{5}$$
$$\rho_3+\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3{}^2+\rho_3{}^2\sqrt[3]{5}$$

נקבל שלפולינום המינימלי של $\rho_3+\sqrt[3]{5}$ מעל $\mathbb{Q}$ יש לפחות 6 שורשים שונים, אך דרגת הפולינום היא לכל היותר 6, כי $\rho_3+\sqrt[3]{5}\in E$.

4. בחרו בסיס של $E/\mathbb{Q}$ מהשאלה הקודמת. הציגו את ההעתקה הלינארית $T(x)=(\rho_3+\sqrt[3]{5})x$ כמטריצה בעזרת הבסיס. מצאו את הפולינום האפייני של המטריצה. הסיקו מ 4 שזהו הפולינום המינימלי של $\rho_3+\sqrt[3]{5}$.

פתרון: נבחר את הבסיס $B=\{1,\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{5}^2=\sqrt[3]{25},\rho_3,\rho_3\sqrt[3]{5},\rho_3\sqrt[3]{25}\}$.

$$T(1)=\rho_3+\sqrt[3]{5}$$
$$T(\sqrt[3]{5})=\rho_3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}$$
$$T(\sqrt[3]{25})=5+\rho_3\sqrt[3]{25}$$
$$T(\rho_3)=\rho_3{}^2+\rho_3\sqrt[3]{5}=-1-\rho_3+\rho_3\sqrt[3]{5}$$
$$T(\rho_3\sqrt[3]{5})=\rho_3^2\sqrt[3]{5}+\rho_3\sqrt[3]{25}=-\sqrt[3]{5}-\rho_3\sqrt[3]{5}+\rho_3\sqrt[3]{25}$$
$$T(\rho_3\sqrt[3]{25})=\rho_3{}^2\sqrt[3]{25}+5\rho_3=-\sqrt[3]{25}-\rho_3\sqrt[3]{25}+5\rho_3$$

אם כך מטריצת המעבר היא

$$A:=\begin{bmatrix}0&0&5&-1&0&0\\1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&-1\\1&0&0&-1&0&5\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&0&1&-1\end{bmatrix}$$

חישוב של הפולינום האפייני נותן לנו

$f(x)=\det(xI-A)=x^6+3x^5+6x^4-3x^3-9x^2+18x+36$.

פולינום זה הוא פולינום שההעתקה הלינארית T היא שורש שלו, אבל כשמציבים את את T זה כמו להציב $\rho_3+\sqrt[3]{5}$ וכיוון שהפולינום המינימלי של $\rho_3+\sqrt[3]{5}$ הוא מדרגה 6, נקבל שבהכרח $f(x)$ הוא הפולינום המינימלי.

5. יהי E/K שדה פיצול של פולינום $f(x)\in F[x]$ שכל שורשיו שונים. אם $Gal(E/K)$ פועלת טרנזיטיבית על שורשי $f(x)$ אזי $f(x)$ אי-פריק מעל F .

פתרון: נניח בשלילה שהפולינום פריק, אזי $f(x)=g(x)h(x)$ פירוק אמיתי. כיוון שכל השורשים שונים, נקבל ש $g(x),h(x)$ זרים. אם החבורה טרנזיטיבית, אזי קיים אוטומורפיזם המעביר שורש α של $g(x)$ לשורש β של $h(x)$. אבל לפי משפט מהתרגול, בהכרח β גם שורש של $g(x)$, ולכן $(x-\beta)\mid(g(x),h(x))=1$ סתירה.