

תרגיל 12 בפונקציות מרוכבות

1. חשבו את

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

כאשר

$$f(z) = e^{2z}(z-1)^3(z-2)^4(z-3)^{-5}(z-5)^{-3}$$

פתרון: לפי עקרון הארגומנט סופרים את האפסים והקטבים כולל ריבוי

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 3 + 4 - 5 = 2$$

כי $z = 1, 2, 3$ מחוץ לתחום המדובר.

2. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש למשוואה

$$z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4} = 0$$

(א) בטבעת $\frac{1}{4} < |z| < 1$ נגדיר $f(z) = \frac{1}{4}$ ו $g(z) = z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4}$. ואז על המעגל $|z| = \frac{1}{4}$ מתקיים

$$|g(z) - f(z)| = |z^3 - 2z^2| \leq \frac{1}{64} + 2 \frac{1}{16} < \frac{1}{4} = |f(z)|$$

ולכן לפי משפט רושה, אין אפסים בתוך $|z| < \frac{1}{4}$. גם אין אפסים על $|z| = \frac{1}{4}$ כי במקרה זה

$$|z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4}| \geq \frac{1}{4} - |z^3 - 2z^2| > 0$$

מצד שני, על $|z| = 1$ מתקיים ש

$$|z^3 + \frac{1}{4}| \leq \frac{5}{4} < 2 = |2z^2|$$

ולכן לפי משפט רושה לפולינום

$$z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4}$$

יש שני אפסים בתוך העיגול $|z| < 1$ ובסך הכל יש שני אפסים בטבעת $\frac{1}{4} < |z| < 1$

(ב) בתחום $|z| > 1$?

פתרון: לפולינום אין אפסים על $|z| = 1$ כי

$$|z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4}| \geq |2z^2| - |z^3 + \frac{1}{4}| > 0$$

בכל \mathbb{C} יש 3 אפסים לפי המשפט היסודי של האלגברה ולכן לפי סעיף א' בתחום הנתון יש אפס אחד בדיוק.

3. תהי $g(z)$ פונקציה אנליטית ב $\{z \mid |z| \leq 1\}$ המקיימת כי $|g(z)| < 1$ על המעגל $|z| = 1$. הוכיחו כי קיימת z אחת ויחידה בכדור היחידה שבה $g(z) = z$.
פתרון: נשתמש במשפט רושה ונגדיר $f(z) = -z$ אז לפי הנתון על עיגול היחידה

$$|g(z)| \leq 1 = |-z|$$

ולכן מספר האפסים של $-z$ בתוך כדור היחידה הוא כמספר האפסים של $g(z) - z$ דהיינו 1.

4. יהי $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ פולינום. הוכיחו כי חייבת להיות נקודה z עם $|z| = 1$ שבה $|p(z)| \geq 1$.
פתרון: נניח בשלילה שלכל נקודה z עם $|z| = 1$ מתקיים $|p(z)| < 1$. ונגדיר $f(z) = -z^n$ אז מתקיים שעל מעגל היחידה

$$|g(z)| < |f(z)|$$

ולכן מספר האפסים של $-z^n$ בתוך מעגל היחידה כמספר האפסים של

$$g(z) + f(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

אבל ל $-z^n$ יש n אפסים בתוך מעגל היחידה ול $g(z) + f(z)$ יש לכל היותר $n - 1$ אפסים בכל \mathbb{C} (כי הוא פולינום ממעלה לכל היותר $n - 1$) וזאת סתירה.