תרגיל מספר 3

1. נגדיר $f(z)=f(x+iy)=x^2(1+i)+y^2(1-i)$.

א. באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?

ב. באילו נקודות $f'(z)$ אנליטית? (כלומר נקודות שבהן קיימת סביבה שלמה שבה f גזירה).

2. נגדיר $f(z)=\bar{z}^2 e^{2z}$, באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?

3. א. הוכיחו שאם $f(z)$ ו- $\overline{f(z)}$ הן פונקציות שלמות אז f קבועה.

ב. הוכיחו שאם $f(z)$ ו- $f(\bar{z})$ הן פונקציות שלמות אז f קבועה.

4. נניח ש- f היא פונקציה אנליטית בעיגול $|z|<R$, הוכיחו שגם הפונקציה $\overline{f(\bar{z})}$ אנליטית שם.

5. נניח ש- $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה שלמה, נניח שבכל מקום $u_x=u_y$. הוכיחו שבהכרח f היא פונקציה לינארית מהצורה $f(z)=az+b$.

6. א. הוכיחו את הזהות $\frac{d}{dz}\frac{d}{d\bar{z}}=\frac{d}{d\bar{z}}\frac{d}{dz}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

ב. תהי $f=f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום $D\subseteq\mathbb{C}$. עבור $z=x+iy\in D$ נגדיר

$$h(x,y)=\left|f(x+iy)\right|^2=\left|f(z)\right|^2$$

הוכיחו שב- D מתקיים $h_{xx}+h_{yy}=4\left|f'(z)\right|^2$.

<u>תזכורת</u>: $\frac{d}{d\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\quad \frac{d}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, זכרו גם שאם f היא פונקציה אנליטית אז מתקיימות הזהויות $\frac{df}{d\bar{z}}=\frac{d\bar{f}}{dz}=0$ (כלומר גזירה של f לפי המשתנה $\bar{z}$ שווה לאפס).