חשבון אינפי 1 למדמ"ח

שיעור 13: משפט הסנדוויץ', הגדרה רקורסיבית של סדרה, סדרות מונוטוניות, סדרות חסומות, גבולות חלקיים.

משפט הסנדוויץ':

תהיינה $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle,\langle c_n\rangle$ סדרות המקיימות:

א. $a_n \le b_n \le c_n$ החל מ-n מסוים

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

אזי $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

משפט הסנדוויץ' המוכלל: אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו-$b_n \ge a_n$ החל מ-n מסוים, אז $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

תרגיל 1: חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

פתרון: באיבר הכללי a_n של הסדרה יש n מחוברים כאשר המחובר הקטן ביותר הינו $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ והמחובר הגדול ביותר הינו $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ולכן

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

ב. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}$$

פתרון: $\frac{n^n}{n!} \ge \frac{n^n}{n^{n-1}} = n \to \infty$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = \infty$.

תרגיל 2: השתמשו במשפט הסנדוויץ' על מנת להוכיח את הטענה הבאה:

אם $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

הוכחה: $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ לכל $n\in\mathbb{N}$. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-|a_n|\right) = -\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ כדרוש.

הגדרה: סדרה $\langle a_n \rangle$ נקראת סדרה **מונוטונית עולה** אם $a_{n+1} \ge a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

סדרה $\langle a_n \rangle$ נקראת סדרה **מונוטונית יורדת** אם $a_{n+1} \le a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הגדרה: סדרה $\langle a_n \rangle$ נקראת **חסומה** אם קיים $M \ge 0$ ממשי כך ש- $|a_n| \le M$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הגדרה: סדרה $\langle a_n \rangle$ נקראת **חסומה** אם לכל $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, a_H סופי.

משפט: סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

תרגיל 3: עבור הסדרות הבאות קבעו האם היא:

א. מונוטונית.
ב. חסומה.
ג. מתכנסת. אם הסדרה מתכנסת מצאו את גבול הסדרה.

1. $\left\langle 2-\frac{n-1}{10} \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$

פתרון:

א. הסדרה מונוטונית יורדת, כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$a_{n+1}-a_n = 2-\frac{n}{10}-\left(2-\frac{n-1}{10}\right) = -\frac{1}{10} < 0$ ולכן $a_{n+1} < a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$

ב. הסדרה אינה חסומה , כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{n-1}{10}\right) = -\infty$.

ג. הסדרה מתבדרת למינוס אינסוף

2. $\left\langle \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$

פתרון:

א. הסדרה מונוטונית עולה, כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$a_{n+1}-a_n = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10^n}-\frac{1}{10^{n+1}}\right) > 0$ ולכן $a_{n+1} > a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ב. הסדרה חסומה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{3}{5} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10}\right) = a_1 \le a_n = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) < \frac{2}{3}$

ולכן $|a_n| < \frac{2}{3}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ג. הסדרה מתכנסת ו- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = \frac{2}{3}$.

3. $\left\langle \frac{1-(-1)^n}{n^3} \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$

פתרון:

א. הסדרה אינה מונוטונית, כי $a_1=2, a_2=0, a_3=\frac{2}{27}$, כלומר $a_1>a_2$ ו- $a_2<a_3$.

ב. הסדרה חסומה, כי $0\le\frac{1-(-1)^n}{n^3}\le\frac{2}{n^3}\le 2$ לכל $n\in\mathbb{N}$, ולכן $|a_n|\le 2$ לכל $n\in\mathbb{N}$

ג. הסדרה מתכנסת, כי $\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}=0$ (מספר סופי חלקי אינסופי)

תרגיל 4: הוכיחו, כי הסדרות הרקורסיביות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן :

א. סדרה המוגדרת ע"י $a_1=\sqrt{2}$, $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ לכל $n\ge 2$ טבעי

הוכחה:

ננחש את גבול הסדרה

נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=L$

$L=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_{n-1}}=\sqrt{2+L}$ ולכן $L^2=2+L$ ומכאן $L=-1$ או $L=2$. מאחר ואברי הסדרה חיוביים נקבל $\lim_{n\to\infty}a_n=2$.

שימו לב: עדיין לא הוכחנו שהסדרה מתכנסת, אבל אחרי שנוכיח את ההתכנסות נוכל להסיק ש- $L=2$ הינו גבול הסדרה.
החישוב שעשינו לניחוש גבול הסדרה יעזור לנו לדעת מהו החסם של הסדרה.
במקרה שלנו החסם הינו 2 , נותר רק להוכיח זאת.

נוכיח שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה ואז לפי משפט נוכל להסיק שהיא מתכנסת.

צריך להראות $a_n-a_{n-1}=\sqrt{2+a_{n-1}}-a_{n-1}\ge 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

$a_n-a_{n-1}=\sqrt{2+a_{n-1}}-a_{n-1}=\frac{2+a_{n-1}-a_{n-1}^2}{\sqrt{2+a_{n-1}}+a_{n-1}}\ge 0$ מאחר ואברי הסדרה חיוביים אי השוויון האחרון מתקיים אם ורק אם $2+a_{n-1}-a_{n-1}^2\ge 0$ אם ורק אם $-1\le a_{n-1}\le 2$.

מכיוון ש- $a_{n-1}>0$ לכל n נותר להראות ש- $a_{n-1}\le 2$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

נוכיח באינדוקציה על n .

בסיס האינדוקציה : $a_1=\sqrt{2}\le 2$

הנחת האינדוקציה: $a_{n-1} \le 2$

נוכיח: $a_n \le 2$.

$a_n = \sqrt{2+a_{n-1}} \le \sqrt{2+2} = 2$ (המעבר הראשון לפי הגדרת הסדרה והמעבר השני לפי הנחת האינדוקציה).

לסיכום הוכחנו שהסדרה מונוטונית עולה ומקיימת $0 < a_n \le 2$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כלומר הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן לפי משפט מתכנסת.

ולפי החישוב שעשינו קודם $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

ב. סדרה המוגדרת ע"י $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\beta a_n{}^2 + \frac{1}{\beta}\right) \forall n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 < \beta \le 1$.

הוכחה:

1. כמו בתרגיל הקודם ננחש קודם מהו גבול הסדרה

   נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\beta a_{n-1}^2 + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\beta L^2 + \frac{1}{\beta}\right)$$

   נפתור את המשוואה $L = \frac{1}{2}\left(\beta L^2 + \frac{1}{\beta}\right)$ ביחס ל- L ונקבל $L = \frac{1}{\beta}$.

   כמו שציינו קודם אין זו הוכחה של קיום הגבול, אבל זה עוזר לנחש את החסם של הסדרה. במקרה שלנו זהו $\frac{1}{\beta}$.

2. נבדוק מונוטוניות

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\beta a_n{}^2 + \frac{1}{\beta}\right) - a_n = \frac{\beta}{2}\left(a_n^2 - \frac{2a_n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{\beta}{2}\left(a_n - \frac{1}{\beta}\right)^2 \ge 0$$

   ולכן הסדרה מונוטונית עולה.

3. נוכיח שהסדרה חסומה

   $a_{n+1`} = \frac{1}{2}\left(\beta a_n{}^2 + \frac{1}{\beta}\right) > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ולכן הסדרה חסומה מלרע.

   נוכיח באינדוקציה על n ש- $a_{n+1`} = \frac{1}{2}\left(\beta a_n{}^2 + \frac{1}{\beta}\right) \le \frac{1}{\beta} \ \forall n \in \mathbb{N}$:

   בסיס האינדוקציה: $a_1 = 1 \le \frac{1}{\beta}$, כי לפי הנתון $0 < \beta \le 1$.

   הנחת האינדוקציה: $a_{n`} = \frac{1}{2}\left(\beta a_{n-1}{}^2 + \frac{1}{\beta}\right) \le \frac{1}{\beta}$

נוכיח $a_{n+1`}=\frac{1}{2}\left(\beta a_n^{\ 2}+\frac{1}{\beta}\right)\le\frac{1}{\beta}$

$a_{n+1`}=\frac{1}{2}\left(\beta a_n^{\ 2}+\frac{1}{\beta}\right)\le\frac{1}{2}\left(\beta\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\beta}$ (המעבר לאי שוויון לפי הנחת האינדוקציה).

כלומר הוכחנו שהסדרה חסומה מלעיל ע"י $\frac{1}{\beta}$.

לסיכום הוכחנו שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת.

ולפי החישוב שעשינו קודם נוכל להסיק ש- $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\beta}$.

הגדרה: $L\in\mathbb{R}$ נקרא **גבול חלקי** של הסדרה $\langle a_n\rangle$ אם קיימת תת סדרה $\langle a_{n_k}\rangle$ כך ש- $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=L$.

משפט: סדרה מתכנסת אם ורק אם היא חסומה וכל הגבולות החלקיים שלה שווים ביניהם.

תרגיל 5: מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה הבאה:

$$\langle a_n\rangle=\left\langle(-1)^n\left(5-\frac{3}{4n}\right)\right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$$

פתרון:

נתבונן בשתי תתי סדרה

$$\langle a_{2k}\rangle=\left\langle(-1)^{2k}\left(5-\frac{3}{4\cdot 2k}\right)\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}=\left\langle\left(5-\frac{3}{8k}\right)\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$$

$$\langle a_{2k-1}\rangle=\left\langle(-1)^{2k-1}\left(5-\frac{3}{4(2k-1)}\right)\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}=\left\langle-\left(5-\frac{3}{4(2k-1)}\right)\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$$

$\lim_{k\to\infty}a_{2k}=5$ ו- $\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=-5$

אלה הם הגבולות החלקיים היחידים, כי האינדקסים של תתי הסדרות מקיימים $\{2k|k\in\mathbb{N}\}\cap\{2k-1|k\in\mathbb{N}\}=\varnothing$ ו- $\{2k|k\in\mathbb{N}\}\cup\{2k-1|k\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}$, כלומר האינדקסים של שתי תתי הסדרות מכסים את כל הטבעיים.

תרגיל 6: תהיינה $\langle a_n\rangle$ ו- $\langle b_n\rangle$ שתי סדרות נתונות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $\langle a_nb_n\rangle$ מתכנסת, אז $\langle a_n\rangle$ ו- $\langle b_n\rangle$ מתכנסות.

תשובה: לא נכון

דוגמא: $\langle a_n\rangle=\left\langle(-1)^n\right\rangle$ ו- $\langle b_n\rangle=\left\langle(-1)^n\right\rangle$ סדרות מתבדרות, אבל

$\langle a_nb_n\rangle=\left\langle(-1)^{2n}\right\rangle=\langle 1\rangle$ סדרה קבועה ולכן מתכנסת.

ב. אם $\langle a_n\rangle$ סדרת מונוטונית, אזי $\langle a_n\rangle$ היא סדרת קושי.

תשובה: לא נכון

דוגמא נגדית: $\langle a_n\rangle=\langle n\rangle$ היא סדרה מונוטונית עולה, אבל זוהי לא סדרת קושי כי

עבור $H,K\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$ כך ש- $H>K$ נקבל $a_H-a_K=H-K$ ואם ניקח $H=2K$ ונקבל

$$a_H-a_K=H-K=2K-K=K$$

כלומר מצאנו שני אינדקסים אינסופיים H,K כך ש- $a_H\not\approx a_K$ ולכן הסדרה אינה סדרת קושי.

דוגמא נוספת: $\left\langle 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right\rangle$ היא סדרה מונוטונית עולה, כי

$a_{n+1}-a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n+1}-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}>0$ לכל $n\in\mathbb{N}$, אבל זוהי לא

סדרת קושי, כי עבור $H,K\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$ כך ש- $H>K$

$$a_H-a_K=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{H+1}-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{K}\right)=\frac{1}{K+1}+...\frac{1}{H+1}>\frac{H-K}{H+1}$$

המעבר לאי שוויון נכון, כי יש $H-K$ מחוברים בסכום כאשר הקטן ביותר מבין המחוברים הינו $\frac{1}{H+1}$.

ניקח $H=2K$ ונקבל $a_{2K}-a_K>\frac{2K-K}{2K+1}=\frac{K}{2K+1}>\frac{K}{2K+K}=\frac{1}{3}$,

כלומר מצאנו שני אינדקסים אינסופיים H,K כך ש- $a_H\not\approx a_K$ ולכן הסדרה אינה סדרת קושי.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.

תשובה: לא נכון.

דוגמא נגדית: $\langle a_n\rangle=\langle n+1\rangle$, $\langle b_n\rangle=\langle n\rangle$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, אבל

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(n+1-n)=1\neq 0$$