

פתרון תרגיל בית מספר 7

שאלה 1

- א. נניח בשלילה שהפנים לא ריק. אזי קיימת $a \in \text{int}(A)$. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$. אך מתקיים $|A| \leq \aleph_0$ ועם זאת $|B(a, \varepsilon)| = \aleph$ וזאת סתירה.
- ב. $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ ברור מאי.
- $cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$: $cl(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ ברור. נותר להראות את ההכלה ההפוכה. אך ראיתם באינפי' כי לכל ממשי יש סדרת איברים רציונאליים המתכנסת אליו.
- ג. תהי $p_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ההטלה על הרכיב הראשון. A סגורה שכן: $A = p_1^{-1}(\{0\})$.
- נוכיח שהפנים ריק: תהי $a = (0, a_2, \dots, a_n) \in A$ ונראה ש- $a \notin \text{int}(A)$. יש להראות שלכל $\varepsilon > 0$ $B(a, \varepsilon) \not\subseteq A$. למשל: $\left(\frac{\varepsilon}{2}, a_2, \dots, a_n\right) \in B(a, \varepsilon) \setminus A$.

שאלה 2

- א. F סגורה ב- (X, T_1) ולכן $F^C \in T_1$ ולכן $F^C \in T_2$ ולכן F סגורה ב- (X, T_2) .
- ב. $\text{int}_{T_1}(A) = \bigcup_{T_1 \ni O \subseteq A} O \subseteq \bigcup_{T_2 \ni O \subseteq A} O = \text{int}_{T_2}(A)$
- $: cl_{T_1}(A) \supseteq cl_{T_2}(A)$
- $A \subseteq F$ וגם $cl_{T_1}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ \text{in } (X, T_1)}} F$ וכן $cl_{T_2}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ \text{in } (X, T_2)}} F$. כעת נשים לב שלפי א', אם $A \subseteq F$ וכן סגורה לפי T_1 אזי $A \subseteq F$ סגורה לפי T_2 . לכן
- $. cl_{T_1}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ \text{in } (X, T_1)}} F \supseteq cl_{T_2}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ \text{in } (X, T_2)}} F$
- ג. שימו לב שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה הרגילה, ולכן כל קבוצה פתוחה לפי הרגילה, פתוחה לפי סורגנפריי; וכנ"ל לגבי קבוצה סגורה (לפי סעיף א).
- $(0,1)$ פתוח לפי סורגנפריי ומתקיים $\text{int}((0,1)) = (0,1)$. מה לגבי הסגור? הקבוצה $(0,1)$ אינה סגורה, מכיוון שיש בה סדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 2}$ המתכנסת ל-0. לכן $0 \in cl((0,1)) \setminus (0,1)$.
- מצד שני, $0 \in [0,1)$ סגור ולכן זו בהכרח הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את $(0,1)$ ומכאן $cl(0,1) = [0,1)$.

$[0,1]$: זו קבוצה סגורה בטופולוגיה הרגילה ולכן סגורה גם בסורגנפריי ולכן $cl[0,1] = [0,1]$. בנוסף, נשים לב כי זו קבוצה לא פתוחה: כי כל סביבה של 1 היא מהצורה $[1, \varepsilon)$ עבור $\varepsilon > 1$ כלשהו ולכן לא מוכלת בקבוצה. נמצא את הפנים: הפנים הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב- $[0,1]$ ולכן $int[0,1] = [0,1)$. $int([0,1)) = cl([0,1)) = [0,1)$ ולכן $int([0,1)) = cl([0,1)) = [0,1)$. סגורה (ראו את התרגיל על קשירות) ולכן $int([0,1)) = cl([0,1)) = [0,1)$. $(0,1)$: ניתן לראות (משני נימוקים קודמים) שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה. הפתוחה המקסימלית שמוכלת בתוכה היא $(0,1)$ והסגורה המינימלית שמכילה אותה היא $[0,1]$ ולכן: $int((0,1)) = (0,1)$, $cl((0,1)) = [0,1]$.

שאלה 3

א. נראה שמתקיימות 3 התכונות של טופולוגיה:

$$(1) \quad \emptyset \in \tau \quad \text{שכן} \quad \emptyset \notin X \quad \text{שכן} \quad X \in \tau \quad \text{שכן} \quad X \setminus X = \emptyset \quad \text{סופית.}$$

$$(2) \quad \text{יהיו } O_1, O_2 \in \tau \quad \text{יתכנו שני מקרים:}$$

$$1. \quad x_0 \notin O_1 \quad \text{או} \quad x_0 \notin O_2 \quad \text{במקרה זה} \quad x_0 \notin O_1 \cap O_2 \quad \text{ומכאן} \quad O_1 \cap O_2 \in \tau.$$

$$2. \quad X \setminus O_1, X \setminus O_2 \quad \text{סופיות. במקרה זה נקבל ש} \quad X \setminus (O_1 \cap O_2) = X \setminus O_1 \cup X \setminus O_2$$

$$\text{סופית כאיחוד סופי של סופיות וגם במקרה זה נקבל ש} \quad O_1 \cap O_2 \in \tau.$$

$$(3) \quad \text{בניח שלכל } i \in I \text{ מתקיים } O_i \in \tau \quad \text{יתכנו שני מקרים:}$$

$$1. \quad \text{לכל } i \in I, x_0 \notin O_i \quad \text{במקרה זה נקבל} \quad x_0 \notin \bigcup_{i \in I} O_i \quad \text{ומכאן} \quad \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau.$$

$$2. \quad \text{קיים } i_0 \text{ כך ש} \quad X \setminus O_{i_0} \quad \text{סופית אבל במקרה זה נסיק ש-} \quad X \setminus \bigcup_{i \in I} O_i \subseteq X \setminus O_{i_0} \quad \text{סופית. לכן, גם}$$

$$\text{במקרה זה} \quad \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau.$$

ב. תהי $x_1 \neq x_0$ נראה ש $\{x_1\}$ סגורה.

$$\{x_1\} \text{ פתוחה שכן } x_0 \notin \{x_1\}.$$

$$\{x_1\} \text{ סגורה- נוכיח זאת ע"י שנראה ש } X \setminus \{x_1\} \text{ פתוחה. מתקיים } X \setminus (X \setminus \{x_1\}) = \{x_1\} \text{ סופית}$$

$$\text{ולכן } X \setminus \{x_1\} \text{ פתוחה.}$$

נראה כעת ש- $\{x_0\}$ סגורה ואינה פתוחה.

סגורה- בדיוק כפי שמוכיחים ש- $\{x_1\}$ סגורה. $\{x_0\}$ אינה פתוחה שכן $x_0 \in \{x_0\}$ וכמו כן $X \setminus \{x_0\}$

אינסופית כי X אינסופית.

ג. נפרק לשני מקרים:

A סופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A$, ואנחנו נראה זאת ע"י כך שנראה כי A סגורה. ואכן,

$$A = X \setminus (X \setminus A) \text{ סופית, לכן } X \setminus A \text{ פתוחה ולכן } A \text{ סגורה.}$$

A אינסופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A \cup \{x_0\}$. נראה כי $A \cup \{x_0\}$ היא הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A . תחילה נשים לב כי אם A אינסופית וכן $x_0 \notin A$, אזי A אינה סגורה. אכן, אם נניח בשלילה כי היא סגורה, נקבל ש- $X \setminus A$ פתוחה. אך $x_0 \in X \setminus A$ ולכן בהכרח מתקיים $X \setminus (X \setminus A)$ סופית. אבל אז נקבל ש- A סופית, בסתירה לנתון.

כעת, נראה כי $A \cup \{x_0\}$ סגורה. מתקיים $x_0 \notin X \setminus (A \cup \{x_0\})$ ולכן $X \setminus (A \cup \{x_0\})$ פתוחה, ולכן $A \cup \{x_0\}$ סגורה.

ד. גם כאן יש שני מקרים:

$X \setminus A$ סופית.

במקרה זה, A היא קבוצה פתוחה (לפי הגדרת הטופולוגיה) ולכן $int(A) = A$.

$X \setminus A$ אינסופית.

נראה $A \setminus \{x_0\}$ תת קבוצה פתוחה מקסימלית של A ומכאן $int(A) = A \setminus \{x_0\}$

פתוחה: $x_0 \notin A \setminus \{x_0\}$ ולכן $A \setminus \{x_0\}$ פתוחה.

מקסימלית:

אם $A \setminus \{x_0\} = A$ אז המקסימליות ברורה.

אם $A \setminus \{x_0\} \neq A$ אז A לא פתוחה (שכן במקרה זה $x_0 \in A$ וגם x_0 תחת ההנחה ש $X \setminus A$ אינסופית).

ומכאן $A \setminus \{x_0\}$ הפתוחה המקסימלית המוכלת ב- A .

שאלה 4

נניח בשלילה שקיים $u \in U$ ו- $u \notin cl(A \cap U)$. אזי קיימת סביבה O של u כך ש $A \cap O \cap U = \emptyset$. כעת, U פתוחה ו- $u \in U$ ולכן גם U סביבה של u . לכן, $V := U \cap O$ סביבה של u המקיימת $A \cap V = \emptyset$. בסתירה לכך ש A צפופה (אחד מהקריטריונים לצפיפות הוא: A צפופה אם ורק אם $A \cap W \neq \emptyset$ לכל W פתוחה ולא ריקה. אצלנו, V פתוחה ולא ריקה).

$$U \subseteq cl(A \cap U) \text{ מכאן}$$

הוכחת המסקנה: $A \cap U \subseteq U$ ומכאן $cl(A \cap U) \subseteq cl(U)$ נוכיח את ההכלה הפוכה ונקבל הדרוש.

$cl(A \cap U)$ סגורה המכילה את U ומכאן $cl(U) \subseteq cl(A \cap U)$. בסה"כ $cl(U) = cl(A \cap U)$.

שאלה 5

1. $A \subseteq A \cup B$ לכן עפ"י סעיף (3) נקבל ש $cl(A) \subseteq cl(A \cup B)$, ובאופן דומה מראים ש $cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$. לכן $cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$. נוכיח את ההכלה בכיוון השני:

$A \subseteq cl(A)$, $B \subseteq cl(B)$ ולכן $A \cup B \subseteq cl(A) \cup cl(B)$. כעת $cl(A) \cup cl(B)$ סגורה כאיחוד סופי של סגורות ומכילה את $A \cup B$ לכן גם בהכרח $cl(A \cup B) \subseteq cl(A) \cup cl(B)$ (מדוע?).

$$int(A \cap B) = int(A) \cap int(B) \quad 2.$$

נוכיח הכלה דו כיוונית.

\supseteq : יהי $x \in int(A) \cap int(B)$, אזי קיימת $U \subseteq A$ פתוחה ב- X , וכן $V \subseteq B$ פתוחה ב- X כך ש- $x \in U \cap V$. לכן, $x \in U \cap V$. אבל, $U \cap V$ היא קבוצה פתוחה ב- X , וכן מתקיים $x \in U \cap V \subseteq A \cap B$ ולכן לפי ההגדרה של פנים, $x \in int(A \cap B)$.

\subseteq : יהי $x \in int(A \cap B)$, אזי קיימת $U \subseteq A \cap B$ פתוחה ב- X כך ש- $x \in U$. מתקיים $U \subseteq A \wedge U \subseteq B$, ולכן (לפי ההגדרה) $x \in int(A) \wedge x \in int(B)$.

3. הפרכה- נסתכל ב \mathbb{R} על הקטע הפתוח (שהוא גם קבוצה פתוחה) $(0, 2)$. מתקיים

$$cl(int(0, 2)) = cl(0, 2) = [0, 2]$$

$$int(cl(0, 2)) = int[0, 2] = (0, 2)$$

שאלה 6

א. אם X, Y הומיאומורפיים אז בפרט קיימת פונקציה $f: X \rightarrow Y$ חח"ע ועל ולכן $|X| = |Y|$. ההיפך: נניח ש $|X| = |Y|$ אזי קיימת פונקציה $f: X \rightarrow Y$ חח"ע ועל. אם X, Y מצויידים

בטופולוגיות הדיסקרטיות אז ברור שכל פונקציה $g: X \rightarrow Y$, ובפרט הפונקציה f הנ"ל רציפה ופתוחה (למה?), לכן אם $|X| = |Y|$ אז המרחבים הומיאומורפיים (שכן f רציפה הפיכה ופתוחה).

ב. נראה ש \mathbb{N} דיסקרטי. אמנם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\{n\} = B(n, 1)$ (אפשר לקחת כל רדיוס $1 \geq$) לכן כל נקודון פתוח והמרחב דיסקרטי. $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ אינו דיסקרטי כי למשל $\{0\}$ לא פתוח כי כל כדור מסביב ל 0 כולל נקודות מ $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

ג. $(A, \tau_A), (B, \tau_B)$ אינם הומיאומורפיים כתוצאה מיידית מסעיפים קודמים.

ד. ברור שהעוצמה של שתי הקבוצות היא \aleph_0 . כמו כן הוכחנו בסעיף ב' ש \mathbb{N} דיסקרטי. לכן מ"ל ש $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ דיסקרטי כדי להסיק עפ"י א' שהמרחבים הומיאומורפיים.

נוכיח שכל נקודון מהצורה $\left\{ \frac{n_0}{n_0+1} \right\}$ פתוח. יהי $\varepsilon = \min \left\{ \frac{n_0}{n_0+1} - \frac{n_0-1}{n_0}, \frac{n_0+1}{n_0+2} - \frac{n_0}{n_0+1} \right\}$

ניתן לראות ש $\varepsilon > 0$ וכן ש $B_A \left(\frac{n_0}{n_0+1}, \varepsilon \right) = \left\{ \frac{n_0}{n_0+1} \right\}$.

שאלת בונוס

מצורף פתרון [כאן](#) באדיבותו של גיל סלס.