מבוא לטופולוגיה - תרגיל 11 (פתרון)

<u>שאלה 1</u>

<u>הוכיחו</u> שאם B_i הוא בסיס לטופולוגיה במ"ט X_i $(1 \le i \le n)$ אז האוסף של כל הקבוצות מסוג $G_1 \times \ldots \times G_n$ כאשר $G_i \in B_i$ הוא בסיס לטופולוגית מכפלה ב-$X_1 \times \ldots \times X_n$.

<u>הוכחה</u>

1) הקבוצה G_i פתוחה ב-X_i כי $G_i \in B_i$ (הגדרת הבסיס). לכן $G_1 \times \ldots \times G_n$ פתוחה ב-$X_1 \times \ldots \times X_n$ כאיבר של הבסיס לטופולוגית המכפלה (הגדרת המכפלה).

2) אם U פתוחה ב-$X_1 \times \ldots \times X_n$ ו-$(x_1, \dots, x_n) \in U$, לפי ההגדת טופולוגית המכפלה קיימות קבוצות $V_1, \dots, V_n$ פתוחת במרחבים $X_1, \ldots, X_n$ (כל אחת במרחב שלה) כך ש-$(x_1, \dots, x_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n \subseteq U$. לכן- לפי הגדרת הבסיס – קיימות קבוצות $G_i \in B_i$ $(1 \le i \le n)$ כך ש- $x_i \in G_i \subseteq V_i$. מכאן: $(x_1, \dots, x_n) \in G_1 \times \ldots \times G_n \subseteq V_1 \times \ldots \times V_n \subseteq U$, כלומר הנקודה $(x_1, \dots, x_n)$ מוכלת ב-U יחד עם סביבתה מסוג $G_1 \times \ldots \times G_n$.

על סמך *1) ו- 2)* אנו טוענים שאוסף של הקבוצות מסוג $G_1 \times \ldots \times G_n$ הוא בסיס לטופולוגית המכפלה.

<u>שאלה 2</u>

<u>הוכיחו</u> שהטופולוגיה ב- $(X_1 \times \ldots \times X_n) \times (Y_1 \times \ldots \times Y_m)$ היא אותה הטופולוגיה שב-$X_1 \times \ldots \times X_n \times Y_1 \times \ldots \times Y_m$.

<u>הערה</u> אפשר להניח שמהבחינה הקבוצתית שתי הקבוצות האלה זהות, כלומר,הן מכילות אתם האיברים:

$$(X_1 \times \ldots \times X_n) \times (Y_1 \times \ldots \times Y_m) =$$
$$X_1 \times \ldots \times X_n \times Y_1 \times \ldots \times Y_m =$$
$$Z = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) | x_i \in X_i, y_j \in Y_j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$$

<u>הוכחה</u>

נסמן ב-$\tau_{\times\times}$ את הטופולוגיה ב-$(X_1 \times \ldots \times X_n) \times (Y_1 \times \ldots \times Y_m)$

וב-$B_{\times\times}$ נסמן את הבסיס של $\tau_{\times\times}$.

נסמן ב-$\tau_{\times}$ את הטופולוגיה ב-$(X_1 \times \ldots \times X_n \times Y_1 \times \ldots \times Y_m)$

וב-$B_{\times}$ נסמן את הבסיס של $\tau_{\times}$.

אזי נתבונן בקבוצות מסוג

$$(**) \qquad (U_1 \times \ldots \times U_n) \times (V_1 \times \ldots \times V_m) =$$
$$(*) \qquad U_1 \times \ldots \times U_n \times V_1 \times \ldots \times V_m$$

כאשר $U_i \subseteq X_i, V_j \subseteq Y_j$ $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ – פתוחות כל אחת - במ"ט שלה. ברור ש-(*) ו-(**) היא אותה הקבוצה

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) | x_i \in U_i, y_j \in V_j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$$

מכוון ש-U_i פתוחות ב-X_i ו- V_j פתוחות ב-Y_j, הקבוצה W שייכת גם ל- $B_{\times}$ וגם ל-$B_{\times\times}$.

כלומר, כל$B_{\times}$-סביבה של נקודה $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in Z$ היא בו זמנית $B_{\times\times}$-סביבה שלה ולהפך. לפי ההגדרה השניה של בסיס הטופולוגיה (ההרצאות) מזה נובע ש-$\tau_{\times} = \tau_{\times\times}$.

<u>שאלה 3</u>

<u>הוכיחו</u> שהטופולוגיה הרגילה ב-$\mathbb{R}^n$ היא טופולוגית המכפלה.

<u>הוכחה</u>

למדנו שמטריקות d (המטריקה הרגילה, האוקלכדית) ומטרוקה d_∞ הן מטריקות שקולות, כלומר יוצרות אותה הטופולוגיה τ . למדנו שבסיס לטופולוגיה במרחב מטרי הוא אוסף של כדורים.

1) בפרט, נתבונן בבסיס $\mathfrak{B}_\infty$ המורכב מהכדורים במטריקה d_∞.
כלומר:

$$\mathfrak{B}_\infty = \left\{B_\infty^{(n)}(a, r)\right\}_{a \in \mathbb{R}^n, r > 0}$$

כאשר:

$$B_\infty^{(n)}(a,r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - a_i| < r, 1 \le i \le n\} = (a_1 - r, a_1 + r) \times \dots \times (a_n - r, a_n + r)$$

אם נסמן ב- $\mathfrak{B}_\times$ את הבסיס של טופולוגית המכפלה , מיד נראה שאוסף ש- $\mathfrak{B}_\infty \subset \mathfrak{B}_\times$ ולכן $\underline{\tau \subseteq \tau_\times}$.

2) עכשיו נוכיח את ההכלה ההפוכה. תהי $a \in U \in \tau_\times$ אזי קיימת $V \in \mathfrak{B}_\times$ כך ש-$a \in V \subseteq U$. לפי הגדרת בסיס לטופולוגית המכפלה: $V = (c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n)$ כאשר $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$, ובנוסף, כוון ש-$a \in V$, מתקיים: $c_i < a_i < d_i$ לכל $1 \le i \le n$. אם נקח $r = \min\limits_{1 \le i \le n}\{\min\{|a_i - c_i|, |a_i - d_i|\}\}$, אז נקבל ש-

$$(a_1 - r, a_1 + r) \times \dots \times (a_n - r, a_n + r) \subseteq (c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n)$$

כלומר, $a \in B_\infty^{(n)}(a,r) \subseteq V \subseteq U$, שמוכיח ש- $\mathfrak{B}_\infty$ הוא בסיס גם ל-$\tau_\times$ ולכן $\underline{\tau_\times \subseteq \tau}$. אזי $\tau_\times = \tau$, מש"ל.

<u>שאלה 4</u>

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו- $A, F \subseteq X$; $B, G \subseteq Y$.

<u>הוכיחו</u>: א) אם F, G סגורות אז $F \times G$ סגורה.

ב) $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

<u>הוכחה</u>

א)

$$(F \times G)^c = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \notin F \lor y \notin G\} = F^c \times Y \cup X \times G^c$$

F^c, G^c פתוחות כמשלימים לסגורת (במ"ט X, Y בהתאם). לכן $F^c \times Y, X \times G^c$ פתוחות לפי הגדרת מרחב המכפלה. אזי $(F \times G)^c$ פתוחה כאחוד פתוחות ואז $F \times G$ סגורה, מש"ל.

ב1) <u>$\overline{A\times B}\subseteq \bar{A}\times\bar{B}$.</u>

$A\subseteq\bar{A}$ ו-$B\subseteq\bar{B}$, לכן $A\times B\subseteq\bar{A}\times\bar{B}$ (*)

אבל $\bar{A},\bar{B}$ סגורות (כל אחת - כסגור) ולפי א) - $\bar{A}\times\bar{B}$ סגורה.

אזי מ-(*) נובע:

$\overline{A\times B}\subseteq\bar{A}\times\bar{B}$ (תכונה של סגור).

ב2) <u>$\bar{A}\times\bar{B}\subseteq\overline{A\times B}$</u> .

נניח ש- $(x,y)\in\bar{A}\times\bar{B}$ ו-W סביבה של (x,y) ששייכת לבסיס תופולוגית המכפלה. כלומר, קיימות קבוצות פתוחות U,V כך ש- $W=U\times V$, $x\in U\subseteq X$ ו- $y\in V\subseteq Y$. כוון ש-$x\in\bar{A}$ ו-$y\in\bar{B}$: $U\cap A\neq\emptyset$ ו-$V\cap B\neq\emptyset$ ומכאן : $W\cap A\times B\neq\emptyset$.

קבלנו ש-$(x,y)\in\overline{A\times B}$. אזי $\overline{A\times B}\subseteq\bar{A}\times\bar{B}$ וסופית:

$\overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}$, מש"ל.

<u>שאלה 5</u>

יהיו $F,G\subseteq M$ שתי קבוצות קומפקטיות במרחב מטרי M. <u>הוכיחו</u> שקימות נקודות $x_0\in F$ ו-$y_0\in G$ כך ש-$d(x_0,y_0)=\inf\limits_{\substack{x\in F\\ y\in G}} d(x,y)$.

<u>הוכחה</u>

הוכחנו בכיתה ש- $d: M\times M\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נגדיר פונקציה $g: F\times G\to\mathbb{R}$ כך ש- $g=d|_{F\times G}$. אזי גם g רציפה כצמצום של d.

אבל $F\times G$ קומפקטי כמכפלה של מ"ט קומפקטיים. לכן $g(F\times G)$ קומפקטי כתמונה של מ"ט קומפקטי. לפי המשפט של היינה –לבג $g(F\times G)$ קבוצה חסומה וסגורה ב-$\mathbb{R}$. לכן

$\inf\limits_{\substack{x\in F\\ y\in G}} d(x,y)=\inf\limits_{\substack{x\in F\\ y\in G}} g(x,y)=r_0\in f(F\times G)$. אזי קיימות נקודות $x_0\in F$ ו-$y_0\in G$ כך ש-$r_0=d(x_0,y_0)$, מש"ל.