

תרגיל בית 8 במבוא לתורת החבורות סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. תזכורת: שיכון הוא מונומורפיזם (הומומורפיזם חח"ע).

- א. מהו המספר הטבעי n הקטן ביותר כך שניתן לשכן את החבורה \mathbb{Z}_5 ב- S_n ? נמקו.
 ב. מצאו שני שיכונים שונים בין החבורות הללו, אחד בדרך קצרה וישנה ואחד בדרך שראינו בתרגול האחרון.

שאלה 2. נסמן כמה איברים של החבורה $GL_2(\mathbb{C})$:

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- ונסמן: $Q = \langle I, J, K \rangle$ (תזכורת: זוהי תת-החבורה הנוצרת ע"י הקבוצה, כלומר: תת-החבורה הקטנה ביותר של $GL_2(\mathbb{C})$ שמכילה את I, J, K).
 החבורה Q נקראת חבורת הקוורטניונים. מצאו באופן מפורש שיכון של Q ב- S_8 , כלומר: חשבו והוכיחו לאן עובר כל איבר.
 רמז: מצאו את כל איברי Q ואת היחסים ביניהם, והיעזרו בכך שבתאריך 16 באוקטובר 1843, ויליאם רואן המילטון חרט על גשר ברום מרוב התלהבות:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

(זה יכול לחסוך הרבה זמן!).

- שאלה 3.** תהי G חבורה מסדר n ויהי $\Phi: G \rightarrow S_n$ שיכון קיילי (השיכון מהוכחת המשפט). הוכיחו שאיבר $g \in G$ הוא מסדר m אם ורק אם $\Phi(g)$ הוא מכפלה של $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים מאורך m .

שאלה 4. הוכיחו כי:

- א. ל- S_n אין ת"ח מאינדקס $2 < t < n$.

- ב. ל- A_6 אין ת"ח מאינדקס ראשוני.

שאלה 5. תהי G חבורה. הוכיחו כי:

- א. כפל מימין, כלומר: $g * x = xg$ (לכל $x, g \in G$), אינו בהכרח פעולה של G על עצמה.
 ב. כפל מימין בהופכי, כלומר: $g * x = xg^{-1}$ (לכל $x, g \in G$), הוא תמיד פעולה של G על עצמה.

שאלה 6. (ממבחן מועד א' תשע"ז) נתון שהחבורה S_3 פועלת על הקבוצה $X = \{R, G, B\}$ כך ש- $(12) * R = G$ ו- $(23) * R = B$. מצאו בעזרת הנתון את הפעולה של כל איבר בחבורה על הקבוצה X (מומלץ להציג את הפעולה ע"י לוח כפל).

שאלה 7. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X . לכל $x \in X$ נגדיר את המייצב שלו:

$$\text{stab}(x) := \{g \in G \mid g * x = x\}$$

(יש שמסמנים אותו ב- G_x), זהו אוסף איברי החבורה שפעולתם לא משנה את x .

א. הוכיחו כי המייצב הוא תמיד ת"ח של G .

ב. משפט קיילי מראה שכל חבורה פועלת על עצמה באמצעות כפל משמאל. הוכיחו שיש ב- G רק מסלול אחד עבור פעולה זו (כלומר לכל האיברים יש אותו מסלול) ושהמייצב של כל איבר בחבורה טריוויאלי.

בהצלחה!