

תרגיל 7

29 במאי 2016

1. יהא $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מעל \mathbb{R} .

(א) מצא לאילו ערכי a

הקבוצה $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2a-5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset V$ בת"ל?
פתרון: נתאים לכל מטריצה וקטור מתאים ונשים את הוקטורים כעמודות מטריצה.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ a & 3 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a-5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & a \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2a-5 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a-6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 2a-6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 2a-6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אם $a = 3$ אזי $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ והוקטורים יהיו ת"ל

אם $a \neq 3$ אזי $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ והוקטורים יהיו בת"ל

(ב) איך התשובה לסעיף (א) היתה משתנת אם היינו חושבים על $S \subset V' = \mathbb{C}^{2 \times 2}$ כמטריצות מרוכבות?
פתרון: ללא שום שינוי.

2. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מעל \mathbb{R} .

$$S = \{p_1 = 1 + x + x^2 + x^3, p_2 = -1 + x^2, p_3 = 1 - x + x^2 - x^3\}$$

(א) האם $1 \in \text{span}(S)$?

פתרון: ש"ל האם ל $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$ יש פתרון. נדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ויש פתרון ולכן התשובה היא כן

(ב) מצא $\text{span}(S)$ (אלו תנאים $p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \text{span}(S)$ צריך לקיים)

פתרון: נדרג $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & a \\ 1 & 0 & -1 & | & b \\ 1 & 1 & 1 & | & c \\ 1 & 0 & -1 & | & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & -2 & | & b-a \\ 0 & 2 & 0 & | & c-a \\ 0 & 1 & -2 & | & d-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & -2 & | & b-a \\ 0 & 0 & 4 & | & c+a-2b \\ 0 & 0 & 0 & | & d-b \end{pmatrix}$

ולכן יש פתרון רק אם $b-d=0$

כלומר $\text{span}(S) = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | b-d=0\} = \{a + bx + cx^2 + bx^3\}$

(ג) האם S בת"ל ?

פתרון: נציב בוקטור הפתרון את וקטור האפס (שמייצג את פולינום האפס) ונקבל לאחר דירוג:

שזה גורר שרק הפתרון הטריוויאלי פותר את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר S בת"ל.

(ד) השלם את S לבסיס ל- V כלומר מצא $S' \subset S$ כך ש S' בסיס ל V .

פתרון: ניקח $x^3 \notin \text{span}(S)$ (לפי סעיף ב) ואז $S = \{p_1 = 1 + x + x^2 + x^3, p_2 = -1 + x^2, p_3 = 1 - x + x^2 - x^3, p_4 = x^3\}$ קבוצה בעלת 4 איברים בת"ל ולכן עפ"י משפט השלישי חינם בסיס.

3. יהיה $V = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} | A^t = A\}$ מרחב המטריצות הסימטריות הממשיות.

(א) מצא בסיס ל V . מהו המימד של V .

פתרון: כל מטריצה סימטרית היא מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ולכן

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בנוסף קל לראות כי אכן המטריצות בת"ל ולכן בסיס. מסקנה $\dim_{\mathbb{F}} V = 3$.

(ב) תהא $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \subset V$ מצא את $\text{span}(S)$.

פתרון: כמו בסעיף הראשון נעבוד עם המטריצה המתאימה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & -1 & b \\ 5 & 2 & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 2 & d-5a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-7a+2b \end{array} \right)$$

כלומר $\text{span}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid d-7a+2b=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 7a-2b \end{pmatrix} \right\}$

4. תהא $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה משולשים עליונה כך שאברי האלכסון שלה שונים מ-0.

(א) הוכח כי שורות U בת"ל.
פתרון: $U = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ כאשר $a_{ii} \neq 0$ ולכן הפתרון למערכת $Ux = 0$ הוא רק הפתרון הטריוואלי.
 (ב) הסק כי שורות U מהווים בסיס ל \mathbb{C}^n .
פתרון: $S = \{R_1(U), \dots, R_n(U)\} \subset \mathbb{C}^n$.
 ב S יש n שורות והן בת"ל (לפי סעיף קודם) ולכן לפי משפט השלישי חינם הן בסיס \mathbb{C}^n .

5. תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} . $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. נניח v_n תלוי לינארית בוקטורים האחרים.

הוכח ש $\text{span}(S) = \text{span}(S')$ כאשר $S' = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$.
הוכחה: (⊇) ברור כי כל צ"ל של איברי S' בפרט צ"ל של איברי S .
 (⊆) נניח $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} = v_n$ נתון v_n ת"ל בוקטורים האחרים
 כעת יהי $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n \in \text{span}(S)$
 $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n =$
 $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}) =$
 $(\beta_1 + \beta_n \alpha_1) v_1 + \dots + (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) v_{n-1} \in \text{span}(S')$

בהצלחה!